Textos Universitarios

Lógica simbólica para todos

Walter Redmond

Universidad Veracruzana

UNIVERSIDAD VERACRUZANA

Víctor A. Arredondo
Rector

Sara Ladrón de Guevara
Secretaria Académica

Rafael G. Murillo
Secretario de Administración y Finanzas

José Luis Rivas Vélez
Director General Editorial

Walter Redmond

LÓGICA SIMBÓLICA PARA TODOS

(lógica elemental, modal, epistémica, deóntica, temporal y semántica de los mundos posibles)

Textos Universitarios

Diseño de colección: Pepe Maya

BC135
R43

Redmond, Walter
Lógica simbólica para todos : (lógica elemental, modal, epistémica, deóntica, temporal y semántica de los mundos posibles) / Walter Redmond. -- Xalapa, Ver. : Universidad Veracruzana, 1999.
359 p. ; 28 cm. -- (Textos universitarios)

ISBN: 968-834-492-3

1. Lógica simbólica. 2. Lógica deóntica. 3. Lógica matemática. I. Universidad Veracruzana. II. t.

DBUV 99/08 C.D.D.: 511.3

Primera edición, agosto de 1999
© Universidad Veracruzana
Dirección Editorial
Apartado postal 97
Xalapa, Ver., 91000, México
ISBN: 968-834-492-3

Impreso en México
Printed in Mexico

Para mis queridos alumnos de filosofía
en Bolivia, Perú y México,
que tanto me han enseñado.

CONTENIDO

Prefacio 15

Introducción 19
Argumentos 19
La lógica 20
La lógica clásica 20
Lo formal 21
La lógica modal 21
Simbolismo 22
Las lógicas 23
Metalógica y filosofía de la lógica 26
Gödel 26

I Parte: Lógica simbólica elemental

Capítulo 1
Cálculo proposicional 31
1.0 La lógica elemental 31
1.1 Formalización 32
1.1.1 Símbolos 32
1.1.2 Proposiciones 34
1.1.3 Sentido de las conectivas proposicionales 37
1.1.4 Conectivas y lenguaje ordinario 39
1.1.5 El cuadro de oposición 42
1.1.6 Notación polaca 42
1.1.7 Circuitos electrónicos 43
1.1.8 Formalización 46
1.2 Reglas de cálculo proposicional 49

1.2.1 Las reglas y el metalenguaje 49
1.2.2 Las semirreglas 50
1.3 Implicación 52
1.3.1 La regla *modus ponens* 52
1.3.2 La regla de la introducción de la implicación 53
1.3.3 Estrategia 54
1.4 Conjunción 61
1.4.1 La regla de la eliminación de la conjunción 61
1.4.2 La regla de la introducción de la conjunción 62
1.4.3 Estrategia 63
1.5 Coimplicación (equivalencia) 65
1.5.1 Definición 65
1.5.2 La regla de la eliminación de la coimplicación 65
1.5.3 La regla de la introducción de la coimplicación 66
1.5.4 Estrategia 67
1.6 Disyunción 68
1.6.1 La regla de la eliminación de la disyunción 68
1.6.2 La regla de la introducción de la disyunción 69
1.6.3 Estrategia 70
1.7 Negación 72
1.7.1 Alcance de la tilde 72
1.7.2 La regla de la eliminación de la negación 72
1.7.3 La regla de la introducción de la negación 74
1.7.4 Las reglas de la doble negación 75
1.7.5 Estrategia 76
1.8 Las equivalencias de Ockham 77
1.9 Reglas derivadas 79
1.10 Sumario de las reglas 81
1.11 Sistema de la tabulación 84
1.12 Cuadro de oposición proposicional 86

Capítulo 2
El cálculo predicativo 87
2.1 Formalización 87
2.1.1 La proposición atómica 87
2.1.2 Tipos de proposición atómica 87
2.1.3 El cuadro predicativo 89
2.1.4 Los elementos de la oración 90
2.1.5 Símbolos de la lógica predicativa 91
2.1.6 Expresiones singulares 91
2.1.7 Expresiones predicativas 93

2.1.8 Proposiciones 93
2.1.9 Ejemplos 94
2.2 Cuantificación 95
2.2.1 Cuantificadores 95
2.2.2 Proposiciones cuantificadas 96
2.2.3 El universo del discurso 97
2.2.4 Cuadro de oposición y compromiso existencial 98
2.2.5 Predicados de predicados 99
2.2.6 Ejemplos 100
2.2.7 Sistemas sortales 104
2.2.8 Interpretaciones de la cuantificación 106
2.2.9 Tipos de relaciones 109
2.3 Reglas de la cuantificación 110
2.3.1 Metalenguaje 110
2.3.2 La regla de la eliminación del cuantificador universal 111
2.3.3 Silogismos 113
2.3.4 La regla de la introducción del cuantificador existencial 115
2.3.5 Las subpruebas generales y sus restricciones 119
2.3.6 La regla de la introducción del cuantificador universal 122
2.3.7 La regla de la eliminación del cuantificador existencial 125
2.3.8 Equivalencias de Sherwood 127
2.3.9 La paradoja de Russell 129
2.4 Silogística 132
2.4.1 Terminología 132
2.4.2 Axiomatización 133
2.4.3 Compromiso existencial 134

Capítulo 3

Lógica de la identidad 137
3.1 Formalización 137
3.1.1 El sentido de la identidad 137
3.1.2 Símbolo 137
3.1.3 Existencia, números y descripciones 138
3.1.4 Expresión de "es" 140
3.2 Axioma y regla de la identidad 142
3.2.1 Axioma de la identidad 142
3.2.2 La regla de la eliminación de la identidad 144
3.3 Abstractores 147
3.4 Cuestiones de la identidad 151

3.4.1 La autoidentidad....151
3.4.2 Identidad e indiscernibilidad....152
3.5 Lógica libre....153

II Parte: Extensiones de la lógica

Capítulo 4
Lógica modal....157
4.0 Ubicación....157
4.1 Modalidad....157
4.1.1 Tipos de proposiciones....157
4.1.2 Lógica elemental y modal....158
4.1.3 Interpretaciones....159
4.1.4 Sistemas de lógica modal....160
4.1.5 Sentido de los operadores modales....160
4.1.6 La implicación estricta....163
4.1.7 Interdefinibilidad....164
4.1.8 Cuadro de la oposición modal....165
4.1.9 Anillos de la cuantificación....165
4.2 Reglas de la modalidad....169
4.3 La regla de la eliminación de la necesidad....170
4.4 La regla de la introducción de la posibilidad....172
4.5 Subpruebas estrictas y los sistemas T, S4 y S5....174
4.6 La regla de la introducción de la necesidad....179
4.7 Fórmulas de Barcan....183
4.8 La regla de la eliminación de la posibilidad....186
4.9 Multiplicación y reducción de los operadores modales....189

Capítulo 5
Lógica epistémica....191
5.0 Ubicación....191
5.1 Símbolos de la lógica del saber....192
5.2 Símbolos de la lógica del creer....195
5.3 Reglas de vínculo con la verdad....197
5.4 Secuentes subordinados epistémicos....201
5.4.1 Los secuentes....201
5.4.2 La iteración....202
5.5 Reglas....204
5.5.1 Introducción del operador del saber....204

5.5.2 Introducción del operador del creer 205
5.5.3 Eliminación del operador de la posibilidad epistémica 207
5.5.4 Eliminación del operador de la compatibilidad doxástica 208
5.5.5 Cuadro epistémico-doxástico 209
5.6 Pluralidad de los operadores epistémicos 211

Capítulo 6
Lógica deóntica 213
6.0 Ubicación 213
6.1 Símbolos de la lógica deóntica 213
6.1.1 Los operadores 213
6.1.2 La proposición deóntica 215
6.2 Secuentes subordinados deónticos 220
6.2.1 Los secuentes 220
6.2.2 La iteración 220
6.3 Las reglas deónticas **io** y **el** 222
6.4 Pluralidad de los operadores deónticos 224

Capítulo 7
Lógica temporal 225
7.0 Ubicación 225
7.1 Bosquejos previos 225
7.1.1 Un sistema diodórico 225
7.1.2 Un cuadro escolástico 226
7.1.3 "Siempre" y "alguna vez" 227
7.2 Un sistema del pasado y del futuro 229
7.2.1 Símbolos y definiciones 229
7.2.2 Vínculo con la verdad y las reglas **ihf** e **igp** 232
7.2.3 Subsecuentes e iteración 233
7.2.4 Reglas de los subsecuentes 234
7.2.5 Pluralidad de operadores 238
7.3 Sistemas lineales y ramificados 239
7.3.1 Sucesión 239
7.3.2 Bifurcación 240

III Parte: Semántica de los mundos posibles

Capítulo 8

Lógica y modos 243
8.1 Introducción 243
8.1.1 Semántica de los mundos posibles 243
8.1.2 Verdad y mundos 244
8.2 Semántica 245
8.2.1 Correspondencia y verdad 245
8.2.2 Otras teorías 247
8.2.3 Portador de la verdad 247
8.3 Los modos 248
8.3.1 "Modal" y "real" 248
8.3.2 Lo que los modos modifican 249
8.4 Posibilidad, necesidad, contingencia 250
8.4.1 Aproximación informal 250
8.4.2 Clases de proposiciones modales 251
8.4.3 Ejemplos 252

Capítulo 9

Historia 255
9.1 Aristóteles y los griegos 255
9.2 Escolástica 257
9.2.0 En general 257
9.2.1 La modalidad sincrónica 258
9.2.2 *De dicto* y *de re* 259
9.2.3. Concepto de mundos posibles 262
9.2.4. La lógica epistémica 264
9.2.5 La lógica deóntica 266
9.2.6 Teoría de la acción 267
9.3 Leibniz y los modernos 268
9.4 Lógica reciente 270
9.4.1 Sintaxis modal e implicación 270
9.4.2 Semántica de los mundos posibles 271
9.4.3 Otras voces 272

Capítulo 10

Mundos posibles 275
10.1 Reglas e iteración 275
10.2 Proposiciones y mundos posibles 276

10.3 Estructura de un mundo posible....278
10.3.1 La situación....278
10.3.2 Contenido del mundo posible....279
10.4 Modos y cuantificación....280

Capítulo 11
Cosmogramas....283
11.1 Clases de mundos....283
11.2 Modos y cosmogramas....284
11.3 Relaciones proposicionales modales....285
11.3.1 Cosmogramas para varias proposiciones....285
11.3.2 Ejemplos....288
11.4 Algunas relaciones proposicionales....289
11.4.1 Consistencia....289
11.4.2. Inconsistencia....290
11.4.3. Contradicción....290
11.4.4. Implicación....291
11.4.5. Independencia....291
11.5 Propiedades y mundos....291

Capítulo 12
Los sistemas modales T y S4....293
12.1 Iteración y sistemas....293
12.2 El sistema T....294
12.2.1 En general....294
12.2.2 Pluralidad de operadores....295
12.2.3 Los anillos....296
12.2.4 Identidad....297
12.3 El sistema S4....300

Capítulo 13
El sistema modal S5....303
13.1 S5 entre los sistemas modales....303
13.2 Necesidad de los modos....304
13.3 Reducción completa....305
13.4 Interpretación de los anillos....306
13.4.1 Problemas con los anillos....306
13.4.2 Esencialismo....308
13.4.3 Soluciones....309

13.4.4 Solución actualista 310
13.5 Asequibilidad 315
13.5.1 Las relaciones 316
13.5.2 Asequibilidad en S5 318
13.5.3 Asequibilidad en T y S4 320
13.6 Mundos no aléticos 321

Capítulo 14
Mundos y filosofía 325
14.1 Filosofía de la ciencia 325
14.1.1 Las leyes naturales 325
14.1.2 Falibilismo 326
14.1.3 Oraciones disposicionales 327
14.1.4 Lógica y ciencia 327
14.2 Literatura 328
14.3 Epistemología 329
14.3.1 Uso de la lógica epistémica 329
14.3.2 Omnisciencia lógica 330
14.3.3 El problema de Moore 331
14.3.4 Universalidad de la regla **ei** 332
14.4 Ética 333
14.4.1 Virtud 333
14.4.2 Deber, posibilidad y libertad 334
14.4.3 Cuadros utópicos y antiutópicos 335
14.4.4 La conciencia 335
14.4.5 Paradojas 338
14.5 La filosofía del tiempo 344
14.5.1 Ser y tiempo 344
14.5.2 Modos y tiempos 345
14.6 Filosofía de la religión 348
14.6.1 La lógica epistémica 348
14.6.2 Existencia de Dios 349
14.6.3 Dios y modalidad 354

Apéndice 357
Simbolismo 357
Reglas lógicas y abreviaturas 358

PREFACIO

El propósito

Este libro es para todos, "autodidactos" o inscritos en programas universitarios, que deseen conocer la lógica simbólica (o matemática) desde dentro y busquen una introducción que no presuponga conocimientos de la lógica ni de la filosofía. Sin embargo, hay que advertir que es programado: los puntos, una vez introducidos, se incorporan en el desarrollo posterior. El estudiante de la filosofía, computación, semiótica y otras áreas lo encontrará especialmente útil.

El libro tiene dos partes: sintáctica y semántica. En la parte *sintáctica* se presentan los conceptos básicos y el manejo de la lógica simbólica elemental y de algunas de sus extensiones más frecuentemente empleadas. En la parte *semántica* se estudia el significado y la interpretación de los sistemas lógicos y, específicamente en la semántica de los mundos posibles, su relación con la realidad extralógica y con la posibilidad y la necesidad.

La lógica clásica elemental (el "cálculo funcional") consta del cálculo proposicional (lógica de proposiciones) y del predicativo (lógica de predicados, teoría de la cuantificación); a estas dos partes se agrega una tercera: la lógica de la identidad. Dentro de este marco presentaremos la "lógica tradicional" (con la silogística de Aristóteles) y también aspectos esenciales de la teoría de los conjuntos y de la computación electrónica.

La extensión fundamental de la lógica elemental que estudiaremos es la lógica modal. *Modal* tiene varios sentidos. La lógica modal *alética* atañe a conceptos tales como necesidad, posibilidad, contingencia y realidad. También estudiaremos otros tipos de la lógica modal: *epistémica*, la lógica del saber y el creer; *deóntica*, la lógica de la ética, y *temporal*, la lógica del tiempo. Es inmediatamente evidente, pues, que la lógica roza con y constituye un aspecto de otras áreas filosóficas: ontología o metafísica, semiótica, epistemología, ética, y las filosofías del lenguaje, de la ciencia, de la religión, etcétera.

No es sólo que la lógica está presente en la filosofía, la filosofía ya está en la lógica. En la filosofía de la lógica, hoy y en el pasado, literalmente todos los aspectos de la disciplina han sido sometidos a un análisis cabal. Comentaremos muchos puntos fundamentales de la lógica desde la perspectiva filosófica, —pues esto arroja luz sobre ellos—, frecuentemente, en el marco de la historia de la filosofía y de la lógica. También mencionaremos algunos términos técnicos en otros idiomas cuando difieren del español, incluso en latín, una lengua importante en la tradición filosófica del pueblo de habla española.

Ciencia y arte

Dice la tradición filosófica que la lógica es tanto una *ciencia* como un *arte*: es algo que se entiende y algo que se hace, la escudriñamos y la usamos en otras áreas, no sólo en la filosofía sino también en informática, literatura, administración de empresas, etc. Pero antes de emplear la lógica en otros campos, tenemos que poderla manejar en sí misma. Se trata de cierta reciprocidad pues para captar lo que es la lógica hay que saberla usar, y para maniobrarla hay que comprenderla.

Los estudiantes que emprenden la lógica simbólica por primera vez se desaniman a menudo porque descuidan el arte de la lógica: tratan de comprenderla o formar actitudes en torno a ella antes de dominar su aspecto técnico. Para aprender la lógica como arte hay que adquirir dos habilidades (no es muy distinto de aprender un idioma extranjero):

1) *formalizar*, e. d., *traducir* (en un sentido amplio) del español al simbolismo y al revés

2) *resolver* las pruebas formales, e. d., derivar una conclusión por medio de las reglas

El alumno no debe preocuparse si al principio no comprende el porqué de todo lo que hace, pues mientras vaya familiarizándose con el manejo de la lógica, comprenderá mejor las controversias técnicas y filosóficas en torno a ella. A medida que adquiera el arte de la lógica, pues, irá adquiriendo la ciencia.

En la aplicación de la lógica hay que adquirir otra habilidad: la de reconocer un problema que la lógica puede ayudar a resolver y formularlo correctamente. En el libro hay muchos ejemplos que incorporan el despliegue lógico de varias cuestiones, y si el lector pondera la metolología empleada, le ayudará a tratar las dificultades en su propia área de interés.

Indicaciones prácticas

Para aprender la lógica simbólica —formalización y resolución— el estudiante tiene que hacer dos cosas:

1) completar los *ejercicios* (trabajando por sí solo)

2) dejarse *corregir* (trabajando con un maestro o dentro de un grupo)

Por ser la lógica un arte, ¡hay que practicarla! Es por esto que se dan tantos ejercicios en el libro. Existe la tentación de omitirlos, porque se cree que ya se entiende en principio los puntos que ilustran. Pero si el alumno no los hace (a menos que haya tenido mucha experiencia con los sistemas formales) probablemente se quedará atrás.

Es muy recomendable que los alumnos trabajen juntos o que formen equipos de estudio para discutir las explicaciones y los ejercicios del libro (¡sin dejar que los otros hagan el trabajo!). Debe haber, pues, una dialéctica entre el individuo y una comunidad. La mejor manera de desanimarse en la lógica es perderse repentinamente y no tener a quién pedir auxilio. Si ocurre esto, y si no hay quien ayude, hay que volver atrás al lugar donde se sentía seguro y retomar el hilo a partir de este lugar. El texto está lleno de referencias para ayudar al lector a encontrar los lugares que quiere repasar.

El sistema

Hay muchas versiones de la lógica simbólica y todas "hacen" lo mismo y expresan la misma lógica. Pero algunas son mucho más difíciles de manejar que otras. Empleamos la aproximación general de F. B. Fitch[1] por estas razones:

1) es relativamente fácil de aprender
2) las pruebas formales siguen aproximadamente la secuencia de los argumentos del lenguaje ordinario
3) variantes del sistema se usan frecuentemente (incluso en los métodos que usa la computadora)

Presentamos un sistema que se llama de *deducción natural*. Se llama así porque todo se hace con reglas sin la necesidad de usar axiomas (con una excepción importante). La deducción natural no sólo es más fácil, es más "lógica", porque hace destacar el aspecto argumentacional del discurso. En las teorías que hacen uso explícito de la lógica —científicas (como la biología), matemáticas (como la geometría) o filosóficas— los axiomas se reservan para el contenido propio (extralógico) de los sistemas.

Nuestro sistema emplea el método de los *secuentes subordinados* ("subpruebas"), desarrollado por Gerhard Gentzen, Stanisław Jas'kowśki y, en la lógica elemental y modal, por Fitch.[2] El método simplifica mucho el manejo de las reglas. Extenderé su uso a la lógica epistémica, deóntica y temporal; una vez que se aprenda la técnica básica, pues, servirá en todas las extensiones de los sistemas lógicos.

Finalmente, es aconsejable que la persona que estudia la lógica por primera vez aprenda bien una versión específica de la lógica; después puede trabajar con otros manuales.

Enfoque

Hemos incluido varias discusiones filosóficas tradicionales en la lógica del siglo XX como también en la lógica escolástica y grecorromana. La lógica simbólica es, a propósito, compatible y en muchos detalles virtualmente idéntica con la lógica desarrollada en la historia anterior de la filosofía.

Mi intención no es sino introducir estas cuestiones de la manera más sencilla posible con la esperanza de que el estudiante siga explorándolas por su cuenta. Hay que recordar que muchas cuestiones de la lógica siguen siendo abiertas y evidentemente no las pretendemos resolver aquí. Sin embargo, parcialmente en aras de la pedagogía, se recalcarán ciertas posiciones filosóficas sin menoscabo de los otros enfoques.

Dizque vivimos en la "posmodernidad". Sería mejor decir "tarde" que "pos", *ni fallor*, porque el escepticismo y la falta de originalidad tan obvios en el debate posmoderno son señales no de arranques sino de postrimerías. Hay dejos de este pesimismo en la filosofía y en lógica misma. Sin embargo, muchos filósofos actuales, lejos de desahuciar la capacidad de alcanzar —y recuperar— algunas verdades significativas para la vida práctica y teórica, siguen con el mazo dando, combinando un optimismo con un espíritu crítico, sintiéndose tal vez partícipes de un proyecto filosófico duradero. Vivimos en efecto en una de las épocas más activas y entusiastas en toda la historia de la lógica. Y al abordar sus complejos problemas nos unimos a los filósofos griegos, medievales, modernos y actuales, quienes con mucha labor y sutileza han ofrecido soluciones.

---

[1] De la Universidad de Yale; *Symbolic Logic/ An Introduction*, The Ronald Press, 1952.

[2] Gentzen: "Untersuchungen über das logische Schließen", *Mathematische Zeitschrift*, tomo 39, 1934 y Jaśkowski: "On the Rules of Suppositions in Formal Logic", *Studia Logica*, núm. 1, Varsovia, 1934.

INTRODUCCIÓN

Argumentos

La filosofía para Sócrates era un cuestionamiento de ideas en discusión con otras personas para llegar a la verdad teórica o práctica. Se trata, pues, de un proceso crítico, de una disciplina. Los participantes en el diálogo deben ofrecer sus soluciones como *conclusiones* obtenidas por medio de procedimientos controlados, es decir, por *argumentos*. Éstos son el tema de la lógica.

En este libro representaremos los argumentos como *pruebas formales*. He aquí un ejemplo sencillo de una prueba formal:

1	Si llueve, Dulcinea está incómoda	**h**
2	Llueve y hace frío	**h**
	├	
3	Llueve	2 **ec**
4	Dulcinea está incómoda	1, 3 **mp**

Este argumento tiene cuatro proposiciones o "pasos" numerados. La rayita ├ separa los pasos en dos grupos. Los que están encima de la rayita son las *premisas* (pasos 1 y 2). Los que se encuentran debajo de la rayita son las *consecuencias directas*, esto es, los que se infieren a partir de las premisas. El último paso de la prueba suele llamarse la *conclusión*. No es necesario, a propósito, que una prueba tenga premisas. Cada paso de la prueba debe tener su *justificación*, escrita a la derecha.

La verdad de las premisas es establecida fuera de la lógica. No es ésta sino la experiencia sensible o la metereología y la psicología quienes dicen cómo es el tiempo y cuáles son sus consecuencias. La lógica, pues, presupone la verdad de las premisas como *hipótesis*. Por lo tanto se escribe "**h**" a la derecha de las premisas, abreviatura de "hipótesis".

En cambio, las consecuencias directas, los pasos 3 y 4, pertencen a la lógica, o mejor dicho se justifican por reglas lógicas. Las justificaciones de los pasos 3 y 4 tienen números y (abreviaturas de los nombres de) las reglas lógicas que los permiten. "**ec**" es abreviatura de "eliminación de la conjunción" y opera en la conjunción ("y") que constituye el paso 2; "**mp**" es abreviatura de *modus ponens* y opera en dos pasos previos: 1 y 2. La justificación "**h**" no tiene número porque una premisa es una hipótesis cuya verdad no depende de, sino que está presupuesta por la prueba formal.

En general, pues, las pruebas formales tendrán la siguiente estructura:

1	*premisa*	**h**
2	*premisa*	**h**
	...	
n	*consecuencia directa*	*regla*
	...	
m	*última consecuencia (conclusión)*	*regla*

Llamaremos "sano" un argumento que: *1*) contiene premisas verdaderas y *2*) procede según la lógica válida. Sin embargo, un argumento sano puede ser tonto; por ejemplo, el argumento

1	$2 + 2 = 4$	**h**
2	$2 + 2 = 4$	1 **r**

es sano ("**r**" significa "repetición"), pero es circular: es una "petición de principio". Además de sano, tonto y cuerdo, un argumento puede ser interesante o irrelevante, importante o trivial, convincente o dudoso, funcional o desventajoso, vigente o superado. El razonamiento goza de cierta "independencia" de la historia: un argumento del pasado que está superado y ahora es rechazado por todos los filósofos eminentes, evidentemente puede ser en sí mismo sano, importante, aun decisivo.

La lógica

La lógica clásica

La lógica es la ciencia que estudia (y el arte que pone en práctica) la validez de los argumentos. Lo hace identificando las reglas que permiten la inferencia de consecuencias.

Comenzaremos nuestro estudio con la *lógica clásica* o elemental: el "cálculo funcional con la identidad". Consta de tres componentes:

1. el cálculo proposicional
2. el cálculo predicativo, la teoría de la cuantificación
3. la identidad

Para describir la diferencia hay que distinguir entre las proposiciones atómicas y moleculares. Una de tipo molecular está compuesta de otras proposiciones (atómicas o moleculares) relacionadas por conectivas como "y", "o" y "si... entonces..."; por ejemplo, "llueve y graniza" es molecular y "llueve" es atómica como también "sé que llueve", pues le faltan conectivas.

La lógica proposicional trata de proposiciones moleculares, analizando las relaciones entre sus proposiciones constituyentes, sin tomar en cuenta la estructura interior de las proposiciones atómicas de que constan.

La lógica predicativa analiza la estructura de las proposiciones atómicas que tienen "predicados" y trata de las relaciones interproposicionales que dependen de la estructura interior de las proposiciones atómicas.

La lógica de la identidad también analiza una clase de proposiciones atómicas, las identidades, y trata de las relaciones interproposicionales que dependen de la identidad.

Lo formal

Lo que interesa al lógico es lo *formal*, como cuando hablamos de la "lógica formal". Por un lado "formal" significa que el lógico no repara —como lógico— en el contenido extralógico de sus argumentos. Es por eso que emplea *variables*, pues la lógica se aplica a cualquier contenido en el discurso ordinario, en la ciencia y en la filosofía.

Por otro lado, "formal" se refiere al contenido de la lógica misma, la "forma lógica" al decir de los escolásticos: ciertas propiedades de los entes de que la lógica trata —o relaciones entre ellos—, o sea, cierta estructura que tienen. Esta estructura puede estudiarse sin atribuirle ningún significado o "interpretación" fuera del que ya tienen como estructura lógica. Cuando hablamos, por ejemplo, de la relación "y" entre las proposiciones, al decir "y" y "proposición", ya le damos un sentido y nos alejamos un tanto de lo formal en el sentido más "puro".[3] Los símbolos que usamos en la lógica, pues, indican el contenido formal, pero pueden recibir interpretaciones o sentidos ulteriores.

Es importante entender, sin embargo, que la estructura formal lógica tiene su propio sentido, es "algo" por así decirlo, y como tal es objeto de estudio no sólo para la lógica y la filosofía de la lógica sino también para otros campos como la ontología, la lingüística, la semiótica y la epistemología.

La lógica modal

Después de la lógica elemental estudiaremos la "modal", la cual incluye a la primera, añadiéndole nuevos símbolos y reglas. En realidad hay muchos sistemas modales y todos son expansiones de la lógica elemental. Cada uno tiene su forma o estructura lógica. Pero estos sistemas, como formales, no son "modales", si "modal" connota las nociones de la necesidad y posibilidad. Pues al atribuir estos sentidos a lo formal, ya le imponemos otra interpretación. Cuando queremos que las expresiones (u "operadores") modales indiquen la posibilidad y la necesidad, el sistema se llama (modal) *alético*.

Podemos asociar otras interpretaciones con los sistemas modales. Cuando estudiamos la lógica epistémica, deóntica y temporal, los operadores tendrán otros sentidos. El mismo operador al que corresponde "es necesario que" en la alética puede tener los sentidos de "Fulano sabe que" (en la epistémica), "debe ser el caso que" (en la deóntica) y "siempre ha sido el caso que" (en la temporal). Tradicionalmente, la lógica elemental y la modal alética (y temporal) pertenecen a la lógica, pero rayan en la ontología. Las interpretaciones más "alejadas", las epistémicas y deónticas, lindan con la epistemología y la ética, respectivamente.

[3] El cálculo de Boole ("álgebra booleana") puede interpretarse como proposiciones o predicados.

A veces se habla de las "aplicaciones" de la lógica. Usar la lógica en algún área particular pide que se elija un sistema formal que refleje exactamente lo que se quiere expresar y el tipo de argumentación que se quiere permitir. Las aplicaciones no se limitan a la filosofía; por ejemplo, en la física se han sugerido sistemas de lógica "cuánticos" para los eventos subatómicos y sistemas temporales para la relatividad especial.

Demos un ejemplo de "escoger" un sistema lógico de acuerdo con nuestras intuiciones filosóficas. Algunos sistemas modales cuentan con una regla que nos permite quitar un operador "fuerte" y escribir la expresión que afectaba sin el operador. Las interpretaciones "es necesario que", "Fulano sabe que" y "debe ser el caso que" corresponden a operadores fuertes. Preguntemos si queremos permitir esta operación en los siguientes casos:

1	Es necesario que 2 + 2 = 4	**h**
2	2 + 2 = 4	*¿regla?*

1	Fulano sabe que llueve	**h**
2	Llueve	*¿regla?*

1	Fulano cree que Dios existe	**h**
2	Dios existe	*¿regla?*

1	Debe ser el caso que Fulano sea honesto	**h**
2	Fulano es honesto	*¿regla?*

Puede parecer que debemos permitir la regla en los dos primeros casos, pero no en los dos últimos. Pues si algo es necesario, es sin más, y si Fulano sabe (en un sentido fuerte) que algo es cierto, es cierto. Pero evidentemente no se sigue que Dios exista si Fulano cree que existe, ni que sea honesto si debe serlo.

Debemos escoger al menos dos sistemas modales para dar cuenta de estas interpretaciones: uno para la lógica alética de la necesidad y la epistémica del saber y otro para la lógica "doxástica" del creer (así se llama) y la deóntica del deber. Habrá dos lógicas "formales" (hablando únicamente de esta regla): la primera común a la alética y epistémica y la segunda común a la doxástica y a la deóntica. Pero estas lógicas "puras" no tienen nada que ver, en sí mismas, con las interpretaciones o los significados de tener-que, saber, creer ni deber.

Esto es un ejemplo de cómo el filósofo usa la lógica: busca el sistema que concuerde exactamente con sus intuiciones filosóficas. Y es un ejemplo de cómo la lógica puede ayudarnos en el análisis filosófico: nos obliga a pensar con gran precisión.

Simbolismo

En la lógica simbólica "formalizamos", es decir, empleamos un simbolismo artificial. Lo hacemos porque es la manera más fácil de aislar el contenido formal. Empero los símbolos artificiales no son esenciales y varios desarrollos brillantes de la historia de la lógica, los más fundamentales en efecto, se han realizado sin ellos.

No se afirma aquí —ni se niega, pues es cuestión abierta— que todos los argumentos informales, válidos en el discurso ordinario, sean representables en los sistemas lógicos formales. Pero es claro que muchos argumentos importantes en la filosofía y fuera de ella son formalizables. Sin embargo, ha sido un ideal del análisis lógico captar en lenguaje formal todos los argumentos válidos en el discurso ordinario.

Muchos argumentos no son representables en la lógica proposicional; por ejemplo: "para todo número hay un número mayor; luego hay un número mayor que tres". Tenemos que echar mano de la lógica predicativa para dar cuenta de este argumento. Muchos argumentos no son representables en la lógica elemental; por ejemplo: "es necesario que 2 + 2 = 4; luego 2 + 2 = 4". Nos hace falta la lógica modal alética para explicar tales inferencias.

Otros argumentos parecen eludir la formalización porque son *vagos*; por ejemplo, "si los que trabajan demasiado deben descansar y mucha gente trabaja demasiado, entonces mucha gente debe descansar". Se han hecho varias tentativas de remediar tal imprecisión. Además, se ha disputado cuál sea la "traducción" simbólica adecuada de expresiones del lenguaje natural como "si... entonces...", o si existe una traducción adecuada. En efecto, tales problemas han dado pie al desarrollo de varios tipos de lógica, o de varias lógicas.

Las lógicas

Las extensiones "ordinarias" de la lógica clásica dejan ésta intacta; no sólo son compatibles con ella sino que también la incluyen. Así son las lógicas que estudiaremos abajo: la alética, la epistémica, la deóntica y la temporal, a las que podríamos agregar otras, como las de las relaciones, de los mandatos (la imperativa) y de las preguntas (la erotética).

Sin embargo, se han propuesto otras lógicas que difieren de la clásica en puntos esenciales y le son "alternativas". Tales lógicas se llaman, "desviadas" (*deviant*) o "delicuescentes".[4] Ejemplos son la lógica intuicionista (L. E. J. Brouwer y A. Heyting),[5] las lógicas "borrosas" (*fuzzy*) o "difusas" de Lofti A. Zadeh[6] y las de la relevancia (A. R. Andersen y N. D. Belnap, 1.1.4.4).

La lógica de los intuicionistas, por ejemplo, no admite la regla de la eliminación de la doble negación (**edn**), un principio que forma parte de la lógica clásica (1.7.4), debido a su concepción de que las matemáticas corresponden a los entes mentales.

Ha sido sobre todo la vaguedad y ambigüedad del lenguaje natural y del pensamiento lo que motivaba el desarrollo de las lógicas alternativas. Algunos como Carnap[7] —y este procedimiento es evidentemente deseable en general— recalcan la importancia de quitar los equívocos del discurso ordinario, "precisándolos" antes de formalizarlos en la lógica simbólica. Sin embargo, el lenguaje natural contiene muchos tipos de argumentos válidos que quedaban intratables —al menos así parecían— por la lógica clásica y por sus extensiones ordinarias. Y, efectivamente, muchos de los esfuerzos por incluir tales argumentos en ella han tenido éxito.

---

[4] W. V. O. Quine usó "*deviant*" en *The Philosophy of Logic*, 1970.

[5] "Historical Background, Principles and Methods of Intuitionism", *South African Journal of Science*, 49; Heyting, *Intuitionism*, 1966.

[6] Remonta a un artículo en *Information and Control* en 1964. Se ven como predecesores de la lógica borrosa C. S. Peirce (una lógica de la vaguedad, perdida), J. Tukasiewicz (lógica plurivalente) y Max Black (conjuntos y grados). B. Kosko es uno de los teóricos más destacados de la lógica borrosa. Hay revistas y organizaciones internacionales dedicadas al tema. Véase la lógica de L. Peña (bibliografía en *El ente y su ser*, 1985).

[7] *The Logical Foundations of Probability*, 1950.

Es la vaguedad de los conjuntos lo que constituye el punto de partida de las lógicas "borrosas". Zadeh, pensando que la lógica debe imitar la ambigüedad del lenguaje y del cerebro, alteró la noción acostumbrada de "conjunto", "clase", o "cúmulo" al decir que una cosa puede pertenecer a un conjunto en varios grados. Éstos pueden medirse por decimales entre 0 (significa que la cosa no es miembro del conjunto) y 1 (significa que es miembro de pleno derecho), o pueden indicarse por "calificadores (*hedges*)" tales como "muy" y "poco"; por ejemplo, puede decirse que Fulano pertenece en el grado 0.8 al conjunto de la gente alta o que es "bastante" alto. Se pregunta, pues, no tanto *si* Fulano es alto, sino *cuán*, qué tan, alto es.

A su vez el concepto del conjunto altera al de la verdad, pues los asertos pueden ser más o menos verdaderos, se afirma, de acuerdo con el tipo de pertenencia al conjunto. "Mengano es alto" puede ser, según el grado de su pertenencia a la clase de la gente alta, "bastante verdadero", "más o menos verdadero", "poco verdadero", etc. Un número indefinido de grados, en efecto, puede mediar entre la verdad y la falsedad. Tales sistemas, los que admiten los valores veritativos fuera de la verdad y la falsedad, se llaman *plurivalentes* ("multivalentes", "polivalentes"). También se niega que valga de los sistemas borrosos el principio de la bivalencia, según el cual cada aserto es o verdadero o falso (1.1.4.1).

Los promotores de la lógica borrosa apuntan con orgullo a su utilidad y a su éxito práctico. Se han fabricado semiconductores ("*chips*") borrosos cuyos conmutadores, en vez de tener sólo dos estados (encendido/apagado), como los ordinarios, dejan pasar distintas cantidades de corriente, desde 0 hasta 10 o incluso hasta 100 (1.1.7). La lógica borrosa ha contribuido a métodos para regular los autómatas de producción y otros tipos de máquinas, como también con los "sistemas de expertos" que han posibilitado avances tecnológicos en muchas áreas.[8] Se ha aseverado que los sistemas borrosos, combinados con otros adelantos como las "redes neurales", reflejan mejor cómo funciona el cerebro y por lo tanto pueden aportar mucho al desarrollo de la inteligencia artificial. Existe el optimismo de que contribuyan al desarrollo de aparatos futuristas, desde los robots domésticos y androides sexuales a los "mapas cognitivos (*FCM*)" capaces de arbitrar las diferencias políticas.

Las lógicas borrosas han sido promovidas con entusiasmo, y se ha insistido en su relevancia para la filosofía misma. Por otro lado, han sido criticadas de complejidad y artificialidad, negándose inclusive que la lógica formal como tal tenga algo que ver con sus usos técnicos.

En todo caso, las lógicas alternativas en general no se oponen necesariamente a la clásica y a sus extensiones ordinarias, porque los sentidos de los símbolos son distintos. Los conjuntos "borrosos", por ejemplo, no son iguales que los "tajantes" (*crisp*), la posibilidad de trabajar con los cuales la lógica clásica presupone. Los signos que corresponden a "y", "o" y "si... entonces..." en las lógicas borrosas representan conceptos lógicos distintos de los de la clásica. En realidad, esta última forma parte de la borrosa como un caso especial, a saber, cuando los elementos pertenecen a los conjuntos en grado 1 y cuando los enunciados son "totalmente" verdaderos o falsos.

En efecto, las palabras "verdad" y "falsedad" tienen distintos sentidos en la lógica bivalente y en las lógicas plurivalentes. No es menester que las alternativas contradigan el principio de la bivalencia, pues ésta puede reaparecer en otro nivel. La bivalencia es en realidad un tema antiguo en la filosofía. Aristóteles lo planteó en el contexto de los "futuros contingentes": una batalla naval, ¿es necesario o que ocurra o que no ocurra mañana?[9] El lógico del siglo XIV Guillermo de Ockham y los de este siglo, J. Tukasiewicz, E. Post y otros han discutido las lógicas *trivalentes*, en las que existe un tercer valor veri-

[8] Desde las lavadoras, televisores y hornos de microndas a la especulación en la bolsa de valores y a la medicina; desde los trenes del metro y la transmisión del automóvil a los ascensores y los proyectiles teledirigidos.

[9] 18B17 y ss.

tativo entre la verdad y la falsedad. Este valor intermedio ha sido interpretado de varias maneras: "indeterminado", "indecidible", "paradójico", "sin sentido", "vago". Además, se han sugerido varias áreas en las lógicas trivalentes en las que serían pertinentes: las matemáticas, la física cuántica, las paradojas de la lógica.[10] Además, varias lógicas plurivalentes incluyen planteamientos extralógicos que tienen que ver, por ejemplo, no con lo verdadero y falso sino con el conocimiento de lo verdadero y falso. Willard Quine opinó que debemos, pese a la vaguedad, seguir aceptando la bivalencia y muchos lógicos creen prudente su actitud.[11]

Ha sido un objetivo de los defensores de las lógicas borrosas reflejar la imprecisión del lenguaje ordinario. Sin embargo, la claridad ha sido un *desideratum* tradicional en la filosofía; más vale agudizar los argumentos informales mediante la lógica precisa que ofuscar la lógica para imitar el discurso vago. Es importante notar a este respecto que el *nominalismo*, la doctrina de que la lógica tiene las palabras por objeto, ha recibido una crítica aguda no sólo en la escolástica medieval sino también en la filosofía de este siglo.

También ha sido un ideal de los promotores de las lógicas borrosas reflejar la imprecisión del pensamiento o del cerebro. Pero el *psicologismo*, tesis de que la lógica estudia los entes de la psique humana (14.3.4), ha sido objeto de una dura censura tanto en la escolástica como en la filosofía reciente (F. Brentano, G. Frege, E. Husserl). Los que quieren que la lógica borrosa refleje la operación del cerebro parecen ignorar esta crítica del nominalismo y psicologismo (8.2.3).

La laguna entre la realidad y el lenguaje o pensamiento ha sido un escándalo constante en la historia de la filosofía. Aristóteles y los escolásticos hablaban de las continuidades en la realidad y hablaban del "más o menos" *ut in pluribus*.[12] Se toca aquí el "problema de los universales". Platón habló metafóricamente de "participación" (*methexis*) e "imitación" (*mimēsis*) de la relación entre lo definido, "entendible", de las cosas y lo que se nos escapa; entre *kosmos* (orden, mundo, adorno) y *jaos*. Últimamente han surgido varias tentativas interesantes de habérselas con el caos: las teorías de la probabilidad (la versión bayesiana ha sido un gran competidor de la lógica borrosa) y la "teoría del caos".

Por otro lado, y pese al espíritu de cruzado de algunos promotores de las lógicas desviadas, los filósofos que trabajan con la lógica, hoy como en el pasado, generalmente siguen atribuyendo un lugar de preeminencia a la lógica clásica y a sus extensiones modales. Una razón es que su exclusión cuesta caro, porque al negarla también hay que negar otros principios de la lógica que parecen aceptables. Se dijo adecuadamente que si alguien quiere revisar la lógica —en vista de su universalidad—, más vale que sean buenas sus razones.[13]

Hablar de varios sistemas de lógica aplicables a situaciones distintas puede dar la impresión de cierta arbitrariedad, tal vez de un relativismo. No es cierto; pues hay razones por las cuales se proponen estas distinciones. Un ejemplo es la regla de la eliminación de la negación (**eng**), la cual aparece por primera vez en la historia de la lógica en el Pseudoescoto[14] en el siglo XIV y últimamente se ha vuelto a insistir en ella (1.7.2).

---

[10] Muchos lógicos dicen que las proposiciones paradójicas son "indefinidas" en el sentido de que *carecen* de todo valor veritativo; esta solución no supone una lógica trivalente, porque tales proposiciones carecen de un tercer valor (2.3.9). Sin embargo, el principio de la bivalencia se aplicaría sólo a las proposiciones "definidas", las que son o verdaderas o falsas.

[11] *Quiddities/ An Intermittently Philosophical Dictionary* 1987, p. 56; ver Susan Haack, *Deviant Logic*, 1974.

[12] 11B19, 1008B44.

[13] S. Haack, *Philosophy of Logics*; "Como he argüido, los argumentos ofrecidos a favor de las lógicas desviadas muchas veces han sido bastante débiles", p. 238 y cap. 11, párr. 3.

[14] El tratado de los *Primeros analíticos* de Aristóteles fue publicado en una edición del siglo XVII de las obras de Juan Duns Escoto.

Los filósofos, pues, siguen usando la lógica clásica y sus extensiones como *organon*, herramienta, nombre que se dio a las obras lógicas de Aristóteles, en sus esfuerzos por resolver las complejidades y vaguedades de la filosofía.

Metalógica y filosofía de la lógica

El término "metalógica" abarca una serie de cuestiones formales en torno a los sistemas lógicos y matemáticos, como p. ej., la consistencia (ninguna contradicción puede derivarse en el sistema), la completitud (cada fórmula válida del sistema es teorema del sistema), y la decidibilidad (hay un procedimiento que determina si cualquier fórmula del sistema es teorema). La lógica clásica es consistente y completa, y se han encontrado procedimientos de decisión para las fórmulas de la lógica proposicional (1.11), pero (hasta la fecha) no para las de la predicativa (por supuesto, la elemental no es "completa" en el sentido de reflejar todos los argumentos válidos).

La filosofía de la lógica, como indica el nombre, versa sobre cuestiones filosóficas en torno a la lógica. Problemas filosóficos de la lógica elemental son, p. ej., la relación entre el simbolismo lógico y el lenguaje ordinario, el sentido de las conectivas proposicionales y de los cuantificadores, la naturaleza de la proposición u oración, la validez de los argumentos, la semántica y las teorías de la verdad, el objeto principal del análisis lógico. Las extensiones de la lógica evidentemente plantean problemas de la necesidad y posibilidad, del conocimiento, del deber ético y del tiempo.

Efectivamente, la filosofía de la lógica ha escudriñado literalmente cada aspecto de la disciplina. Haremos unos comentarios breves sobre varios temas en sus contextos a través del libro. Con la excepción del teorema de Gödel, no trataremos de la metalógica, porque no es necesario para los fines filosóficos del libro.

Gödel

Describiremos el famoso teorema que Kurt Gödel desarrolló en una monografía de 1931, porque es de mucho interés filosófico y porque puede causar malentendidos en torno a la lógica.[15] El contexto es la metamatemática, estudio de las propiedades de la aritmética, la consistencia, la completitud y la decidibilidad. Gödel dirigió su análisis a las teorías de los números como la de A. N. Whitehead y B. Russell. En *Principia mathematica* (abreviado *PM* aquí) Whitehead y Russell querían mostrar que la aritmética puede fundamentarse en la lógica (la tesis "logicista").[16] Para sorpresa de todos, Gödel demostró que si tales sistemas son consistentes, también son incompletables e indecidibles.

Su compleja prueba puede describirse brevemente de la siguiente manera. Primero se establece un método de representar con los números las fórmulas de la teoría de los números, de tal manera que cada fórmula tiene su número "gödeliano" único. A continuación, usando esta técnica, se simboliza el siguiente aserto, el cual abreviaremos con la letra *G*:

> este aserto de la teoría de los números carece de prueba en el sistema de *PM*;

[15] "Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme".

[16] Primera edición 1910-1913.

o simplemente "yo (*G*) no soy teorema de *PM*". La fórmula *G* evidentemente se refiere a sí misma pero la autorreferencia, con ser paradójica, no es nociva (a diferencia de otras paradojas como "yo miento"[17]).

Ahora bien, se pregunta ¿es *G* mismo un teorema de *PM*? Si contestamos que sí, *G* es teorema, entonces *G* es verdad; pero en este caso no es teorema, pues dice verdaderamente "no soy teorema", y caímos en una contradicción. Así que debemos responder que no, que *G* no es teorema, y esto es precisamente lo que *G* expresa. Pero entonces se trata de una fórmula indecidible: una fórmula que es verdadera pero no es teorema de *PM*. Además, puesto que hay una fórmula indecidible (*G*), la teoría de los números es incompleta. Es más, es *incompletable,* pues si añadimos *G* al sistema de *PM* (incluyéndolo entre los axiomas), podemos repetir el mismo proceso con *PM*-más-*G*, y así infinitamente. También se sigue que la consistencia de semejantes sistemas no puede demostrarse dentro del sistema mismo.

Este resultado evidentemente no conlleva que las matemáticas, o los sistemas formales que el teorema toca, de algún modo no valgan. Sus consecuencias son muy específicas; el teorema significa, p. ej., que no puede demostrarse la completitud de la aritmética y que ésta no puede formalizarse totalmente. El resultado no afecta a la lógica clásica, en el sentido del cálculo inferior con la identidad.[18] Gödel mismo había demostrado un año antes que la lógica predicativa (el cálculo funcional inferior) es completa en el sentido débil; e. d., pueden establecerse todos los esquemas universalmente válidos. Además mostró que el cálculo proposicional es completo también en el sentido fuerte, porque resulta una contradicción si se le agrega como axioma una fórmula no derivable en el sistema.[19] Se ha afirmado en efecto que es aquí mismo donde se marca la frontera entre la lógica clásica y la aritmética: la lógica es completa pero la teoría de los conjuntos, la cual pertenece a las matemáticas, es esencialmente incompletable.[20]

Para los filósofos medievales la lógica era el arte de las artes y para B. Bolzano, gran lógico alemán del siglo pasado, era la ciencia de las ciencias; Frege, redescubridor de la lógica a fines del siglo pasado, dijo que las de la lógica son, si no las leyes de la naturaleza, las leyes de las leyes de la naturaleza.[21] San Agustín tenía más entusiasmo; la lógica, dijo:

> ciencia de ciencias,
> enseña a enseñar, enseña a aprender;
> en ella la razón manifiesta y revela
> qué es, qué pretende, qué puede;
> sabe saber,
> no sólo pretende sino puede, ella sola,
> hacer sabedores.[22]

---

[17] De Eubúlides, o "los cretenses siempre mienten" de Epiménides, citado en Tito 1:12, o "*ego dico falsum*" de la Edad media.

[18] "Inferior" significa que no hay variables de tipo superior; p. ej., no se cuantifican los predicados.

[19] "Die Vollständigkiet der Axiome des logischen Funktionkalküls", 1930.

[20] "La lógica tiene que ser la teoría fundamental de la familia abigarrada de las teorías deductivas que llamamos 'matemáticas', porque todas ellas la presuponen... Gödel reveló que hay una honda distinción entre la teoría de la cuantificación, la cual es completa, y la de los conjuntos, la cual no lo es" (William y M. Kneale, *The Development of Logic*, p. 724).

[21] Bolzano, *Wissenschaftslehre*, 1837; Frege, *Die Grundlagen der Arithmetik*, 1884 (incluyó la aritmética con la lógica).

[22] "*...ipsam disciplinam disciplinarum quam dilecticam vocant; haec docet docere, haec docet discere, in hac se ipsa ratio demonstrat atque aperit quae sit, quid velit, quid valeat; scit scire, sola scientes facere non solum vult sed etiam potest*" (*De Ordine*, bk. 1).

I Parte

LÓGICA SIMBÓLICA ELEMENTAL

Capítulo 1

CÁLCULO PROPOSICIONAL

1.0 La lógica elemental

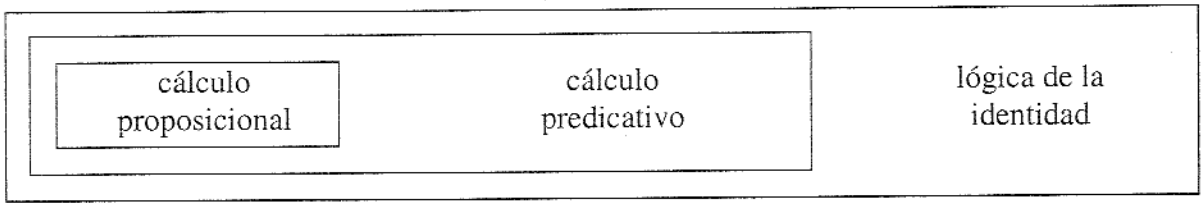
La lógica clásica o elemental, desarrollada por los filósofos griegos y escolásticos, y redescubierta en la última parte del siglo pasado por el alemán G. Frege y el estadounidense Charles Sanders Peirce, consta, como hemos visto (introducción), de tres componentes:

1. *Cálculo de proposiciones.* En él se estudian ciertas relaciones entre las proposiciones, las indicadas aproximadamente por las palabras "y", "o", "si... entonces..." y "si y sólo si"; se incluye la negación "no".

2. *Cálculo de predicados* o *teoría de la cuantificación.* Incluye el cálculo proposicional. Se estudian ciertas relaciones entre las proposiciones indicadas aproximadamente por palabras como "todo", "alguno" y "ninguno".

3. *Lógica de la identidad.* Incluye la lógica de las proposiciones y de los predicados. En ella se estudian las relaciones entre las proposiciones indicadas por expresiones como "es idéntico a".

Las dos primeras partes juntas, el cálculo proposicional y el predicativo, se llaman a veces "cálculo funcional". Los componentes, pues, se relacionan de la siguiente manera:



Se puede imaginar la lógica como un dispositivo que produce sólo las proposiciones lógicamente verdaderas (las cuales en la lógica proposicional se llaman "tautologías").

Las proposiciones que estudiamos en la lógica corresponden a las oraciones completas del español, los asertos que son verdaderos o falsos. No consideraremos las ramas de la lógica que tratan de las preguntas, los mandatos, las declaraciones, etc. (0.3). El hecho de ser una proposición (u oración) verdadera o falsa se llama su "valor veritativo".

1.1 Formalización

Los megáricos y estoicos, sobre todo Crisipo (siglo III a.C.), fueron los primeros en elaborar una lógica de las relaciones proposicionales; asimismo, los escolásticos la desarrollaron, p. ej., en la teoría medieval de las *consequentiae* ("inferencias"). En el siglo XIX varios lógicos volvieron al tema, sobre todo G. Boole, cuya "álgebra booleana" todavía se emplea.

1.1.1 Símbolos

Hay varias presentaciones de la lógica proposicional y emplean una variedad de símbolos, los cuales funcionan de la misma manera; cuando introducimos nuestros símbolos, indicaremos las variantes de uso más frecuente.[23]

Hay dos clases de símbolos: *constantes*, los cuales significan lo mismo "constantemente", y *variables*, cuyo significado "varía".

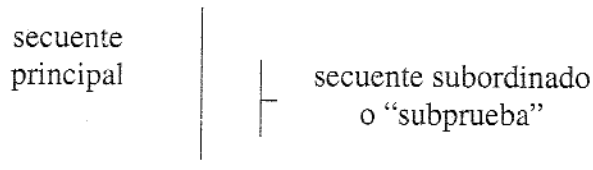
1.1.1.1 Constantes

La lógica emplea dos clases de constantes: las lógicas y las extralógicas. Se recordará (0.1) que éstas, cuando se incorporan en una prueba, tienen que ser justificadas fuera de la lógica.

A. Constantes lógicas. Son de varios tipos:

1) Los integrantes de la *prueba formal* (ver la introdución) pueden considerarse como constantes:

- *Secuentes*, líneas verticales con o sin la rayita: | o ⊢. Sin la rayita se llama "categórico" y con la rayita es "hipotético". Un secuente puede abarcar a otros subordinados (colocados a la derecha). Una prueba se llama categórica o hipotética según si su secuente principal (a la izquierda) es categórico o hipotético. Los secuentes subordinados suelen llamarse "subpruebas"; que también puede ser categóricas o hipotéticas.



La rayita en una subprueba hipotética significa: *si* es verdadero lo que aparece arriba (de la rayita), *entonces* es verdadero lo que aparece abajo.

- *Números* de los pasos de una prueba, escritos a la izquierda del secuente principal.

[23] Consúltese R. Reys y F. B. Fitch, *Los símbolos de la lógica matemática*, Madrid, 1980, traducción de *Dictionary of Symbols of Mathematical Logic*, North Holland. Pub. Co., Amsterdam; hay traducción española de Paraninfu en su colección Lógica y teoría de la ciencia.

- *Justificaciones* de los pasos. Cada paso tiene su justificación escrita a la derecha. Se coloca la abreviatura de la regla que dice por qué el paso se incluye en la prueba. Si el paso se remite a otros anteriores hay que indicarlos escribiendo los números de éstos delante de la abreviatura de la regla.

2. *Corchetes*: [ ], usados para evitar la ambigüedad en las expresiones complejas (1.123).

3. *Operadores* que reflejan el uso de las "expresiones lógicas" en el discurso ordinario: "y", "o", "si", etc. Cada parte de la lógica tiene sus operadores. Usaremos los siguientes símbolos, llamados *conectivas*, como operadores en el cálculo proposicional:

- *negación*: ~ ("tilde"); refleja el sentido de "no" en el lenguaje ordinario (la tilde es una "conectiva" pero en realidad no conecta nada).

- *conjunción*: & ("aspa"); "y", "pero", "que", etcétera.

- *disyunción inclusiva*: v ("cuña"); "y/o".

- *implicación*: > ("herradura"); "si... entonces...", "sólo si".

- *coimplicación*, *equivalencia*: <> ("doble herradura"); "si y sólo si" (abreviaremos esta frase como "ssi"); equivalente a $[p > q]$ & $[q > p]$.

- *no equivalencia*, *contradicción* o *disyunción exclusiva*: </> ("doble herradura con diagonal"); "o"; equivalente a $\sim[p <> q]$.

- *no conjunción*: |; "ni ... ni..."; equivalente a $\sim[p \& q]$.

B. Constantes extralógicas. En la lógica proposicional, las constantes hacen las veces de proposiciones específicas. Usaremos letras *mayúsculas*, escogiéndolas generalmente para recordarnos lo que significan. Ejemplos: *L*: "llueve", *D*: "Dulcinea está incómoda", *F*: "hace frío". Aquí está la primera prueba de la introducción escrita con símbolos:

números	*secuente (hipotético)*	*justificaciones*
1	$L > D$	**h**
2	$L \& F$	**h**
	⊢	
3	L	2 **ec**
4	D	1, 3 **mp**

Evidentemente, las letras deben indicar las mismas proposiciones y cada una de éstas debe ser indicada siempre por la misma letra dentro de la misma prueba o en el mismo contexto; p. ej., en la prueba de arriba, para "Dulcinea está incómoda" no podemos usar *D* en el primer paso y *M* u otra letra en el cuarto.

1.1.1.2 Variables proposicionales

En la lógica proposicional, usaremos las letras *minúsculas*: p, q, r, s, y t para indicar cualquier proposición. Cada una de estas letras, por ser una variable proposicional, hace las veces de cualquier proposición o combinación de proposiciones. En la lógica de los predicados se introducirán otros tipos de variables.

Las variables p, q, r, s, y t, si bien pueden representar cualesquier proposiciones, cuando se repiten dentro del mismo contexto (en la misma proposición o en la misma prueba formal o serie de pruebas) expresan la misma proposición. P. ej., en "$p > p$", p puede representar cualquier proposición, pero las dos p deben aludir a la misma proposición. Por otro lado, cuando hay dos variables distintas, p. ej., "$p > q$", pueden (pero evidentemente no tienen que) hacer las veces de la misma proposición. La expresión "$p > q$", pues, puede representar "si llueve, entonces Dulcinea está incómoda" y también "si llueve, entonces llueve". Pero "$p > p$" sólo puede representar proposiciones como "si llueve, entonces llueve".

Una *fórmula bien formada* del sistema (frecuentemente abreviada "fbf") es cualquier combinación de símbolos permitida por el sistema (a veces un solo símbolo, como en los pasos 3 y 4 de la prueba de arriba). P .ej., "D & F" y "p & q" son fórmulas bien formadas, pero no lo es "& pq". Los pasos de las pruebas formales serán fórmulas. La prueba anterior se expresa con variables (p por L, q por D y r por F) de la siguiente manera:

1	$p > q$	**h**
2	p & r	**h**
3	p	2 **ec**
4	q	1, 3 **mp**

El sentido es: si paso 1 ($p > q$) y paso 2 (p & r) son verdaderos, entonces lo son los pasos 3 (p) y 4 (la "conclusión" q). Ya que se trata de variables, p, q y r pueden representar no sólo lo que L, D y F expresan, sino cualesquier proposiciones.

La lógica en sí misma, porque es aplicable a cualesquier contenidos, no emplea constantes extralógicas. Usamos constantes de este tipo cuando queremos construir pruebas en otros campos, como en la filosofía, y las usamos en la lógica para ilustrar el uso de las reglas.

1.1.2 Proposiciones

1.1.2.1 Proposiciones atómicas y moleculares

Hemos distinguido dos tipos de proposiciones (0.21), representables por fórmulas bien formadas del sistema:

1. *moleculares* (compuestas): son proposiciones que constan de otras proposiciones "más chicas" ligadas por relaciones indicadas por las conectivas: >, &, v, etc., p. ej., "$L > D$", "L & F", "$p > q$" y "p & r" son fórmulas moleculares.

2. *atómicas* (sencillas): son las que no constan de otras proposiciones ligadas por tales relaciones. Las atómicas no son analizables en la lógica proposicional, pero sí en la predicativa y en otras ramas de la lógica. P. ej., *L*, *D*, *F* son fórmulas atómicas. A propósito, "*p*", "*q*" y "*r*", porque son variables, pueden representar cualesquier proposiciones, tanto atómicas como moleculares.

En la primera parte de la lógica, nos interesan principalmente las proposiciones moleculares y sus interrelaciones. Esta clase de proposiciones tienen nombres que reflejan su conectiva principal:

- ~*p* es la *negación* de *p*
- *p* & *q* es una *conjunción* (*p* y *q* son los conyuntos de esta conjunción)
- *p* v *q* es una *disyunción* (*p* y *q* son disyuntos)
- *p* > *q* es una *implicación* (*p* es el antecedente y *q* el consecuente de esta implicación)
- *p* <> *q* es una *equivalencia* o coimplicación
- *p* </> *q* es una *contradicción* o disyunción exclusiva

1.1.2.2 Proposiciones y oraciones

El español, como otros idiomas, cuenta con una familia de palabras que significan más o menos lo mismo: proposición, enunciado, aserto, aseveración, juicio, oración, frase, a las que podría agregarse la fórmula bien formada de la lógica. En la lógica hablamos sólo de los enunciados que se llaman en la gramática oraciones declarativas completas: las que pueden ser V o F (no preguntas, ni mandatos, pronunciamientos, etc.). Escogemos tres términos para indicar otros tantos sentidos filosóficamente bien distintos (8.2.3):

1. *Oración* (*Satz* en alemán, *phrase* en francés, *sentence* en inglés, *propositio* en el latín escolástico): para la lingüística es una sarta gramaticalmente correcta de morfemas de una lengua natural. Se distingue frecuentemente entre la *muestra* y el *tipo* (*token* y *type*) de una oración. La *muestra* es un ente concreto, un signo material (de tinta, tiza, circuitos electrónicos de la computadora, de vibraciones sonoras del aire, etc.) que sugiere cierto significado a las personas que entienden el sistema lingüístico. El *tipo* de las mismas muestras es el "universal", lo que es común a las muestras. Éstas, pues, son concretas y los tipos son abstractos. P. ej., entre las claves {llueve llueve} hay dos muestras de un solo tipo. La oración-tipo se aproxima en sentido a "proposición" o "aserto". Se dice que una oración-muestra "expresa" una proposición. Cuando la discusión se centra en las oraciones, el enfoque es "lingüístico". Frecuentemente usaremos "fórmula" en este sentido.

2. *Juicio* (*Urteil* en alemán, *judgment* en inglés, *judicium* en latín) connota el acto o proceso mental concreto que corresponde a la oración o proposición. Es, pues, una realidad psíquica (sea como se interprete este término), la "propiedad privada" de una persona individual.

3. *Proposición* (*Aussage* en alemán, *proposition* en francés e inglés, *enuntiabile*, *significabile complexum*, *id quod proponitur*, etc. en latín, *axioma* en el griego de los estoicos) es lo que la oración afirma, expresa, consigna, "propone". La proposición es lo que la oración *expresa*. Es lo que las oraciones sinónimas significan; p. ej., "dos más dos son cuatro" y "*zwei und zwei macht vier*" expresan la misma proposición. Prácticamente, puede pensarse como el contenido, sentido, o sig-

nificado intensional[24] de la oración. Algunas concepciones de las proposiciones como entes abstractos se han calificado como variantes del "realismo".

Puede agregarse que "aserto" (*Behauptung* en alemán, *statement* en inglés) a veces se contrasta con la proposición. Es lo dicho, asertado, aseverado; no el acto de aseverar (juicio) ni su expresión (oración) sino lo que ésta "quiere decir". Según algunos, si don Quijote dice a Dulcinea "te quiero", Dulcinea le dice "me quieres", y Sancho Panza dice "don Quijote quiere a Dulcinea", los tres hacen el mismo aserto (8.2.3).

1.1.2.3 Encorchetamiento

Las conectivas ligan una proposición con otra; las relaciones que expresan, pues, son *binarias*. Sin embargo, podemos expresar todas las relaciones posibles entre las proposiciones combinando las relaciones binarias. Indicamos cómo las partes de una fórmula molecular se relacionan usando corchetes. La disposición de éstos en una fórmula molecular a veces se llama la "jerarquía" de la expresión, pues las mismas fórmulas pueden expresar más de una proposición; por ejemplo:

$F \& L > D$

es ambiguo, y por ende no es es bien formada, porque puede leerse de dos maneras:

$F \& [L > D]$

"hace frío, y (además) si llueve entonces Dulcinea está incómoda" y

$[F \& L] > D$

"si hace frío y llueve, entonces Dulcinea está incómoda". La fórmula:

$p \vee s \& p > q$

puede encorchetarse de varias maneras:

$[[p \vee s] \& p] > q$
$[p \vee [s \& p]] > q$
$p \vee [[s \& p] > q]$
...

Cada fórmula molecular constituye una unidad y podemos imaginarla encerrada entre corchetes aun cuando la ambigüedad no está presente:

$[p \vee q]$

[24] Seguimos la usanza filosófica de deletrear la palabra "intención" e "intencional" con *c*, cuando connota un propósito y con una *s* ("intensión", "intensional"), cuando tiene el sentido fenomenológico general de aquello enfocado de alguna manera por, o en la conciencia.

sin embargo, no escribiremos estos corchetes exteriores porque no es necesario para eliminar la ambigüedad de la expresión. Además, cuando rompemos una fórmula molecular y escribimos una parte por separado, no es necesario mantener los corchetes, porque desaparece la ambigüedad; por ejemplo:

r & $[t$ v $s]$
t v s — no $[t$ v $s]$

Y cuando se combina una fórmula con otra molecular, hay que encorchetar ésta so pena de producir una ambigüedad:

r
t v s
r & $[t$ v $s]$ — no r & t v s

También debemos usar corchetes cuando queramos negar una fórmula molecular como conjunto. P. ej., la negación de $q > s$ no es $\sim q > s$ sino $\sim[q > s]$, donde la tilde gobierna la implicación entera. En este respecto la tilde funciona como los cuantificadores y los operadores modales (1.7.1).

La proposición molecular se nombra "conjunción", "disyunción", "implicación", etc., según la conectiva *principal*, más abarcadora. Por ejemplo:

$[[p$ v $s]$ & $p] > q$ es implicación
p v $[[s$ & $p] > q]$ es disyunción
$[p$ v $s]$ & $[p > q]$ es conjunción

En el caso de varias relaciones conjuntivas (&) y disyuntivas (v), no hay que insistir en el uso de corchetes:

p & q & r
t v q v p v r

La razón es que las distintas agrupaciones no alteran el valor veritativo (verdad o falsedad) de la proposición. Técnicamente se dice que de estas fórmulas vale la ley de la asociación, o sea que:

$[p$ & $q]$ & r
p & $[q$ & $r]$

son equivalentes. No se permite esto cuando se combinan disyunción y conjunción, ni en el caso de la implicación (>), pues la variación del encorchetamiento da distintos sentidos y valores de verdad, como es evidente en el ejemplo de arriba.

1.1.3 Sentido de las conectivas proposicionales

Las conectivas que usamos: ~, >, &, v y <>, corresponden parcialmente a —y son mucho más precisas que— las expresiones españolas "no", "si... entonces...", "y", "y/o" y "si y sólo si". Pero el único sentido lógico que reciben es *verifuncional*. Esto significa que la verdad de la proposición molecular depende sólo de la verdad o falsedad de las proposiciones de que consta. De ahora en adelante abreviaremos "verdadero" y "falso" como "V" y "F" y, en el presente contexto, también como "1" y "0", respectivamente.

Podemos definir la conectiva & diciendo que cualquier conjunción p & q es V sólo en el caso de ser V ambos conyuntos: tanto p como q. Definimos la conectiva v diciendo que la disyunción p v q es F sólo cuando los dos disyuntos son F. Los griegos y escolásticos también usaban tales definiciones veritativas de las relaciones proposicionales, y los lógicos George Boole y Gottlob Frege las expresaban con la ayuda de *tablas* o matrices. En efecto, todas las relaciones interproposicionales pueden definirse con su ayuda. La tabla de la negación es sencilla:

p	$\sim p$
1	0
0	1

El esquema significa que si p es V, $\sim p$ es F, y si p es F, $\sim p$ es V. Los números en la columna a la derecha (para $\sim p$) se llama la *función veritativa* de la negación. Ésta, pues, es 01. Aquí están las funciones veritativas que definen cuatro conectivas de uso frecuente:

p	q	p & q	$p > q$	p v q	$p <> q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	1	0	1

La función veritativa de la conjunción es 1000, la de la implicación es 1011, y así sucesivamente. La conjunción p & q es V ssi tanto p como q son V, y es falsa si p es F o q es F o ambos son F. La disyunción p v q es V ssi al menos uno de sus disyuntos, p o q, es V; es F sólo en el caso de ser ambos F. La implicación $p > q$ es F sólo en el caso en que el antecedente p sea V y el consecuente q es F.

Si hay más de dos proposiciones, la tabla tendrá más renglones; en número de renglones (r) es igual a dos (pues hay dos posibilidades, V y F) a la potencia del número de proposiciones (n):

$$r = 2^n$$

La siguiente tabla despliega la conjunción de tres proposiciones ($8 = 2^3$):

p	q	r	p & q & r
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

En efecto, hay 16 relaciones posibles entre dos proposiciones, exhibidas en la siguiente tabla. Indicamos arriba los signos de algunas de las relaciones (1100 corresponde a *p* porque sólo indica cuándo *p* es V o F y 1010 corresponde a *q* porque sólo indica cuándo *q* es V o F):

p	*q*		v	<	*p*	>	*q*	<>	&		</>						
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

No es necesario usar 16 conectivas primitivas para representar las 16 relaciones. Podemos definir algunas conectivas como abreviaturas de otras; p. ej., definiremos la equivalencia o coimplicación (<>) en términos de la negación y la implicación (~, >).

En efecto, hay sistemas de lógica elemental que no emplean más que dos conectivas como primitivas; el sistema lógico de *Principia Mathematica* de Bertrand Russell y Alfred North Whitehead usa la negación con la disyunción (~, v) y otros sistemas usan la negación con la conjunción (~, &) o con la implicación (~, >). Hay sistemos inclusive que no presuponen más que una sola relación proposicional: la no-conjunción (0111) o "ni-ni" (|: 0001). Trabajaremos principalmente con las conectivas ~, >, &, v, <>, < / > —también | en el contexto de los cuadros de oposición (1.1.5)— porque reflejan la argumentación informal o son útiles en el análisis lógico.

1.1.4 Conectivas y lenguaje ordinario

No decimos que los símbolos lógicos siempre traduzcan exactamente las palabras del español. Veamos ahora algunos problemas en torno a la conectivas, sobre todo cómo las conectivas lógicas se asemejan a las correspondientes expresiones del lengaje ordinario y cómo difieren de ellas.

1.1.4.1 Negación

Hay varias cuestiones que se plantean en torno a la negación. En el sistema de lógica que presentamos valen el principio de la *bivalencia* (las proposiciones a que el principio se aplica son o V o F; 1 y 0 en las tablas) y el principio del *tertio excluso* (expresado como *p* v ~*p*: "*p* o no *p*"). Nuestro sistema, pues, es bivalente porque se aplica sólo a las proposiciones que son V o F. En los sistemas plurivalentes (ver la introducción) las tablas tienen más de dos valores y, por ende, las funciones veritativas de las conectivas adquieren un sentido distinto (y las tablas tendrán más renglones).

Hemos mencionado algunos problemas con la bivalencia y con las reglas de la negación (ver la introducción). Puede existir una confusión en torno a las proposiciones que carecen de sentido, como "la responsabilidad es amarilla" (*R*), pues su negación "la responsabilidad no es amarilla" (~*R*) parece tan tonta como su afirmación. Con todo, ~*R* parece ser V, pues es un error categorial: una propiedad como *amarillo*, puede decirse, no conviene a una abstracción como la responsabilidad.

1.1.4.2 Conjunción

La palabra "y" en "Juan se quitó los zapatos y se acostó" indica no sólo la conjunción de los dos actos sino también la sucesión temporal: primero se quitó los zapatos y después se acostó (no se quitó los zapatos en la cama). En cambio, la conectiva "&" no indica más que la conjunción, y p & q equivale a q & p. Sin embargo, si se quiere, se puede expresar la sucesión temporal en la lógica simbólica, y efectivamente se ha desarrollado un sistema que incorpora el operador "y después".

1.1.4.3 Disyunción

La palabra "o" tiene varios sentidos; p. ej., puede representar la función veritativa 1110 (disyunción inclusiva) o 0110 (disyunción exclusiva, o sea la no equivalencia o contradicción: $</>$).[25] En "si falta gasolina (simbolizado como F) o si la batería está muerta (B), no arranca el motor ($\sim A$)" la disyunción es inclusiva ($[F \vee B] > \sim A$), pues tampoco arranca en el caso de no haber gasolina y estar muerta la batería. En cambio, "si hace mal tiempo (M), este vuelo terminará en Atenas (A) o en Roma (R)" es exclusiva ($M > [A </> R]$), pues el mismo vuelo no puede terminar en los dos aeropuertos.

Además, el uso correcto de una regla de la disyunción podría representar un argumento tramposo en el discurso ordinario. Digamos que sé que Juan es el asesino (J) y digo —porque la regla de la introducción de la disyunción permite que deduzca $J \vee M$ a partir de J— "Juan o María es el asesino" ($J \vee M$). Es engañoso decir que Juan o María es el asesino, cuando sé que no es María. Sin embargo, no es la lógica quién tiene la culpa aquí, sino la presuposición de premisas tácitas, un problema que volveremos a ver en las paradojas de la lógica deóntica (14.4.5).

1.1.4.4 Implicación

La implicación sencilla $p > q$ se llama "material", "verifuncional", porque la función veritativa 1011 es lo único que la define, o "filónica", porque el lógico griego Filón de Megara (hacia 300 a.C.) fue el primero que ofreció una tal definición de la oración condicional "si... entonces...". Pero la función veritativa no pretende incluir la gama de significados que tiene la oración condicional española. Prácticamente, esto significa que la oración condicional "si p, entonces q" entraña la implicación lógica "$p > q$", pero la implicación no entraña forzosamente la condicional.

En efecto, se puede saborear mejor el puro sentido verifuncional de "si llueve, me mojo" ($L > M$) si se lee en su forma disyuntiva equivalente: "no llueve o me mojo" ($\sim L \vee M$). Ha habido varias tentativas de captar en lenguaje formal un sentido lógico importante de "si" que vaya más allá de la función veritativa. Generalmente se ha añadido otra relación a la verifuncional o se ha reemplazado la relación verifuncional con otra.

Para evitar ciertas paradojas de la implicación material, C. I. Lewis propuso la implicación "estricta", agregando la noción modal de la necesidad. En su interpretación, "si p entonces q" sería "necesariamente: si p entonces q": p no puede ser V sin que q sea V (4.1.6, 9.4.1). La implicación estricta repre-

[25] A veces se dice (erróneamente) que las palabras latinas "*vel*" y "*aut*" indican los sentidos inclusivo y exclusivo de la disyunción (la cuña "v" viene de "*vel*"). Otra palabra latina, "*seu* (*sive*)", también indica la disyunción y frecuentemente significa "o sea", "dicho de otra manera".

sentaría la relación del entrañamiento (*entailment*), cuya relación conversa es la deducción; e. d., p entraña q ssi q es deducible de p.

Otros lógicos dicen que la añadidura de la necesidad tampoco capta el sentido de la condicional y conlleva sus propias paradojas. Prefieren emplear una relación de la pertinencia. A. R. Anderson y N. D. Belnap propusieron dos lógicas de la *relevancia* (una es modal e incorpora la implicación estricta) para formalizar (parcialmente) la noción del entrañamiento y de la deducibilidad, y posteriormente aparecieron muchos otros sistemas.[26] El concepto de la validez de los argumentos es distinto de aquél de la lógica clásica, pues se exige que las conectivas proposicionales tengan un sentido "intensional". Naturalmente, si se complica el sentido de la implicación, también hay que alterar el sentido de las otras relaciones lógicas, puesto que existen equivalencias lógicas entre ellas. P. ej., ya que $p > q$ equivale a $\sim p \vee q$, los sentidos de las conectivas > y v deben corresponderse uno a otro. Veremos (4.1.6) que la relación entre p y q en la oración condicional "si p entonces q" es distinta en la interpretación modal usual y en la de la lógica de la relevancia.

Las lógicas de la relevancia han sido criticadas sobre todo por las dificultades con que tropieza su formalización, y este problema sugiere que hay elementos de la oración condicional que no pertenecen a la lógica formal en un sentido restrictivo. Los escolásticos habían agregado a la implicación estricta (la cual, desde Boecio y Abelardo se inclinaban a tomar como el caso ordinario)[27] el concepto extralógico de la *causalidad* para interpretar una variante de la oración condicional, la expresada por la palabra "porque". Analizaban "porque p, q" como conjunción de tres proposiciones:

1. p implica q "estrictamente" ($p \rightarrow q$)
2. p
3. p causa q

(q se sigue por *modus ponens*). Quizás intuiciones parecidas pueden dar cuenta de los aspectos de la implicación tratados bajo la rúbrica de la relevancia.

La discusión del sentido de la condicional no es nada nueva en la historia de la lógica, pues fue iniciada por los filósofos griegos Diodoro Crono (siglo IV a. C.) y Filón, y continuó a lo largo de la escolástica. Se dijo que "hasta los cuervos graznan en los tejados sobre cuál es la implicación correcta" en el contexto de los estoicos.[28]

Sin embargo, la implicación material capta una cosa fundamental en el discurso: lo *verifuncional*. En la inferencia es lo menos que se puede asertar, y es expresado por la regla del *modus ponens* (e introducción de la implicación, el teorema de la deducción, 1.3.2). Estas operaciones bastarán sin duda para una gran parte de la argumentación filosófica. De vez en cuando, sin embargo, para ciertos usos se requiere una interpretación más compleja de la relación condicional, la cual, si no resulta ser formal, puede simbolizarse extralógicamente.

---

26 "Tautological Entailments", "The Pure Calculus of Entailment"; *Philosophical Studies*, 13, 1962; *Journal of Symbolic Logic*, 27, 1962, y *Entailment*, 1975.

27 S. Knuuttila, *Modalities in Medieval Philosophy*, Routledge, Londres y Nueva York, 1993, p. 96.

28 Calímaco, s. II a. C., en *Adversus Mathematicos* de Sexto Empírico.

1.1.5 El cuadro de oposición

Los lógicos escolásticos empleaban varios "cuadrados (o cuadros) de oposición" para desplegar las relaciones lógicas entre ciertos tipos de proposiciones. En el siguiente cuadro, se muestran las relaciones típicas entre dos proposiciones, *p* y *q*, y sus negaciones:

p	|	~*q*
>	</>	>
q	v	~*p*

La herradura indica que las proposiciones superiores implican las que están directamente abajo. Las relaciones entre las proposiciones tienen estos nombres:

- implicación: *p* > *q* y ~*q* > ~*p*; tanto *p* y *q* como ~*q* y ~*p* son *subalternas*
- no conjunción: *p* | ~*q*; *p* y ~*q* son *contrarias*
- disyunción: *q* v ~*p*; *q* y ~*p* son *subcontrarias*
- contradicción: *p* </> ~*p* y ~*q* </> *q*; tanto *p* y ~*p* como *q* y ~*q* son *contradictorias*

p	contrarias	~*q*
subalternas	contradictorias	subalternas
q	subcontrarias	~*p*

Estudiaremos estas relaciones en sus lugares.

Haremos uso frecuente de los cuadros, los cuales comprimen mucha información en varios contextos (1.1.2, 2.1.3...). P. ej., es una manera fácil de distinguir entre varios sistemas modales (4.1.8).

1.1.6 Notación polaca

En la lógica proposicional hay variedad de símbolos (1.1.1); p. ej., "∧" o "•" se usan en vez de "&" y "→" o "⊃" en vez de ">", y funcionan exactamente como nuestros símbolos. En cambio, las conectivas "polacas" de Łukasiewicz, si bien hacen lo mismo como las nuestras, son distintas porque se colocan *delante* de las dos fórmulas que unen. Un resultado elegante de este método es que se evita la necesidad de encorchetar las fórmulas para evitar la ambigüedad. Las conectivas polacas más importantes son:

~*p*	N*p*
p > *q*	C*pq*
p & *q*	K*pq*
p v *q*	A*pq*
p <> *q*	E*pq*
p | *q* (~[*p* & *q*])	D*pq*

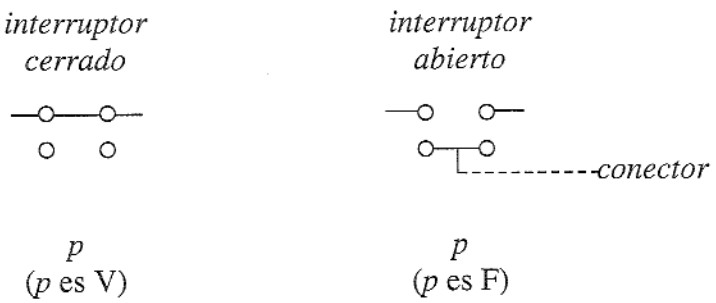
Algunos ejemplos:

$[p \,\&\, q] \,\&\, r$	K*Kpqr*
$p \,\&\, [q \,\&\, r]$	K*pKqr*
$p \,\&\, [q \vee r]$	K*pAqr*
$[p \,\&\, q] \vee r$	A*Kpqr*
$[p \vee s] \,\&\, [p > q]$	K*ApsCpq*
$[[p \vee s] \,\&\, p] > q$	C*KAspq*
$p \vee [[s \,\&\, p] > q]$	A*pCKspq*
$[p \vee s] \,\&\, [p > q]$	K*ApsCpq*.

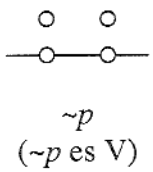
1.1.7 Circuitos electrónicos

Podemos representar y definir las funciones veritativas por medio de los circuitos de conmutación, ilustrando al mismo tiempo la operación de la computadora.[29] El circuito básico es sencillo: consta de interruptores, luces, alambres y una fuente de electricidad. Los semiconductores (*chips*) contienen muchísimos conmutadores, pero cada uno es básicamente sencillo.

Un interruptor[30] representa una proposición y, para representar su verdad o falsedad, puede estar en dos estados: *cerrado* o prendido y, *abierto* o apagado. Cuando está cerrado significa *p* (*p* es V) y cuando está abierto significa ~*p* (*p* es F). Los siguientes dibujos muestran cómo el interruptor representa "*p* es V" y "*p* es F". El primero está cerrado y afirma *p*, pues pasa la corriente, porque el conector está *arriba* y une los terminales de arriba con los que los alambres están conectados con la luz y la fuente eléctrica. El interruptor a la derecha está abierto (no pasa la corriente) y niega *p*.



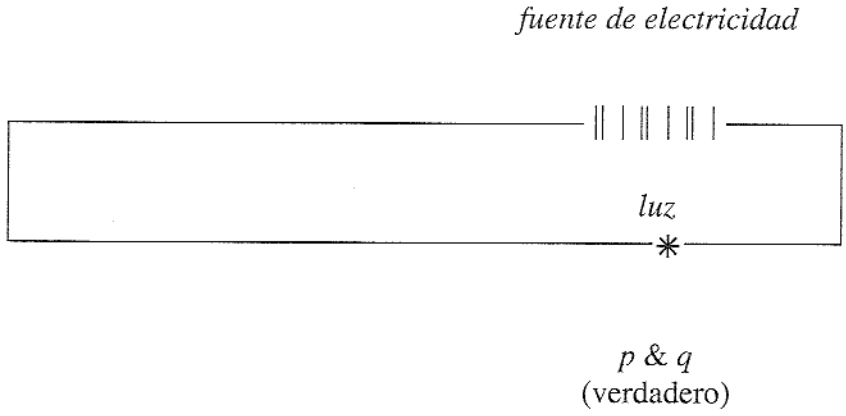
Cuando se afirma ~*p* como V, se conectan los alambres con los terminales de abajo:



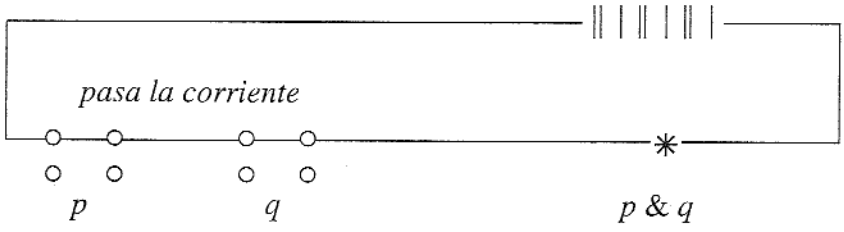
[29] C. S. Peirce fue el primero en aplicar el álgebra booleana a los circuitos.

[30] La misma proposición puede ser representada por más de un interruptor.

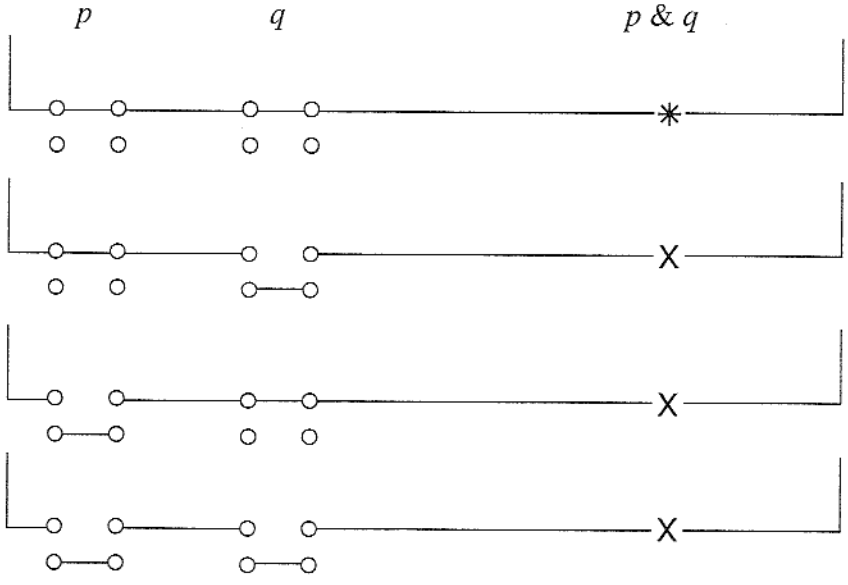
La luz representará las proposiciones moleculares como p & q, p v q, las cuales deseamos definir. La luz también puede estar en dos estados: *prendida* y *apagada*. Los estados corresponden a los mismos valores veritativos V (1, prendido) y F (0, apagado):



Aquí está el diagrama de la conjunción p & q:



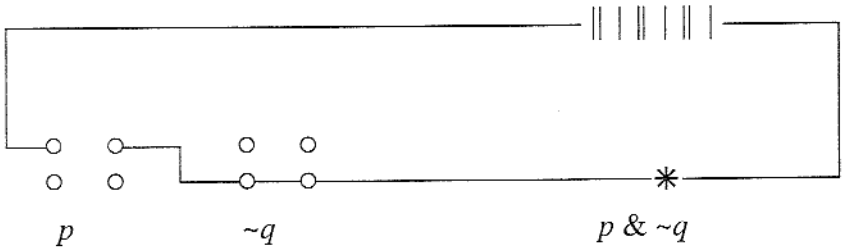
Puede verse que se enciende la luz (indicación de que vale la conjunción p & q) sólo en el caso de estar los conectores arriba, e. d., cuando los dos interruptores p y q están cerrados, es indicación de que tanto p como q son V (cuando la luz está apagada escribimos una equis):



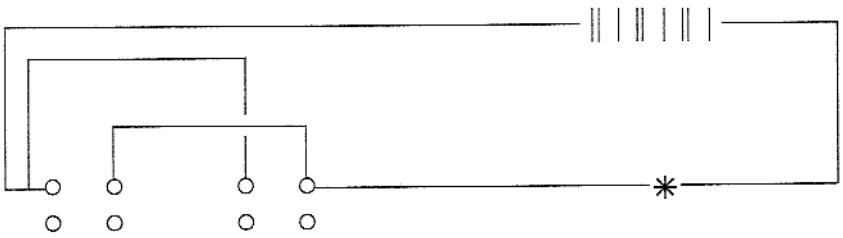
Se ve que los estados de los interruptores corresponden a la tabla veritativa de la conjunción:

p	q	$p \& q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

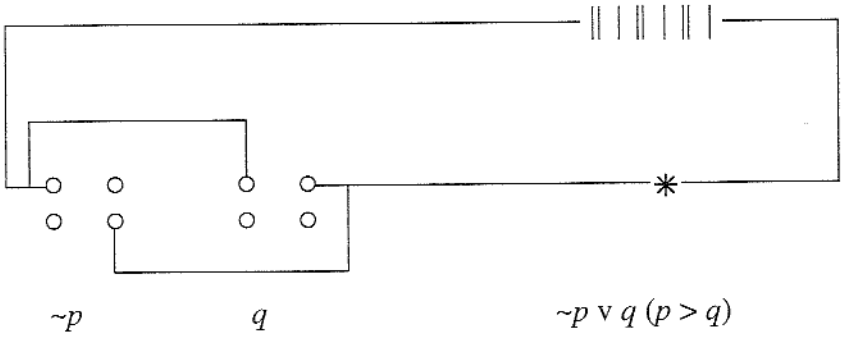
He aquí el diagrama de $p \& \sim q$:



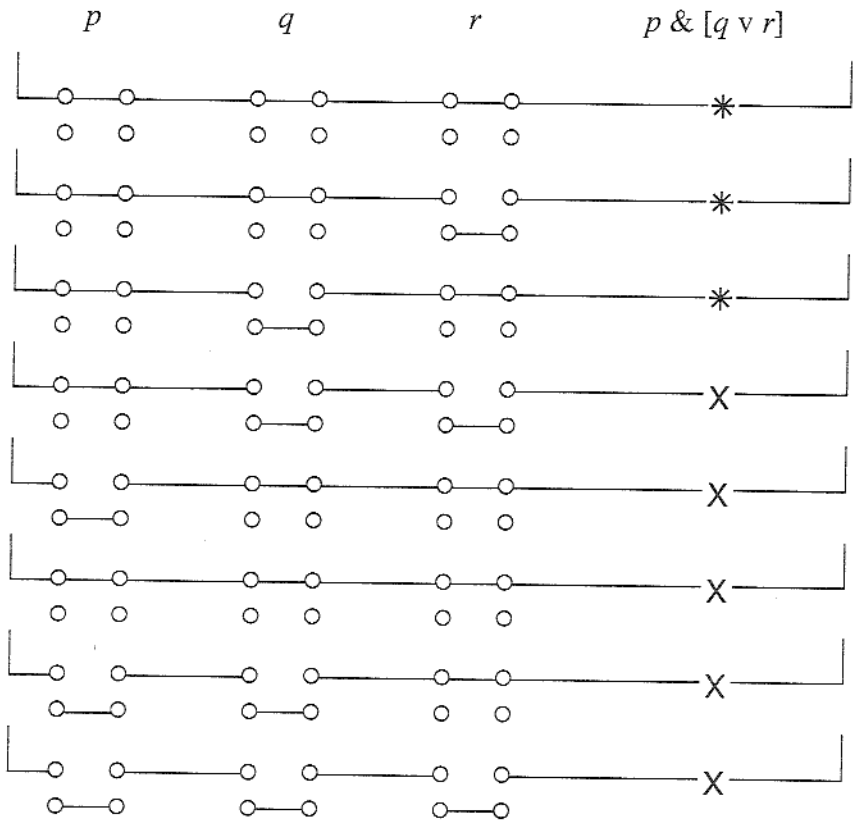
y el diagrama de $p \vee q$:



Las proposiciones $p > q$ y $\sim p \vee q$ son equivalentes. La primera, pues, puede representarse con un circuito de la disyunción:



Aquí está el diagrama de un circuito que incorpora tres proposiciones: p & [q v r]:



La computadora funciona con base en la conjunción, disyunción y negación, y se refiere a los dispositivos electrónicos correspondientes como "puerta-y" y "puerta-o" y "convertidor".

También se usan conmutadores llamados "borrosos" (ver la introducción), los cuales, en vez de representar sólo dos estados, prendido y apagado, admiten otros valores. Hay semiconductores cuyos interruptores funcionan como "coladores" (*sieves*) que dejan pasar varias cantidades de corriente, p. ej., de 1 a 10 o de 1 a 100.

1.1.8 Formalización

Una buena regla empírica para traducir el lenguaje ordinario al simbolismo lógico es: *traduzca el sentido*, no las palabras. Generalmente no existe ninguna correspondencia de uno a uno entre las palabras y los símbolos. Es como la interpretación simultánea: el traductor oye una oración de la primera lengua, capta el contenido y expresa éste en la segunda lengua. Hay que "subir", pues, al contenido:

sentido

↗ ↘

oración	fórmula
lenguaje ordinario	*simbolismo lógico*

La oración y la fórmula pueden expresar aproximadamente el mismo contenido, pero en la filosofía conviene que el simbolismo lógico represente lo que se quiere decir de la manera más exacta posible.

Aquí están varios ejemplos de la formalización (antes de mirar las traducciones, se sugiere que el estudiante trate de simbolizarlas por sí mismo):

1. Don Quijote está feliz.	F
2. Dulcinea ama a don Quijote.	A
3. Don Quijote está feliz.	Q
4. Don Quijote está feliz si Dulcinea lo ama.	$A > F$
5. Don Quijote no está feliz si Dulcinea no lo ama.	$\sim A > \sim F$
6. Don Quijote está feliz si Dulcinea lo ama.	$A > Q$
7. Si Dulcinea ama a don Quijote, éste está feliz.	$A > Q$
8. Dulcinea ama a don Quijote si éste está feliz.	$Q > \mathrm{A}$
9. Don Quijote está feliz si Rocinante come bien.	$R > Q$
10. Don Quijote está feliz sólo si Rocinante come bien.	$Q > R$
11. Don Quijote está feliz ssi Rocinante come bien.	$Q <> R$
12. Don Quijote está feliz si está feliz.	$F > F$
13. Don Quijote es una ficción o Dulcinea es una ficción.	$Q \vee D$
14. Don Quijote o Dulcinea es una ficción.	$Q \vee D$
15. Don Quijote y Dulcinea son personajes famosos.	$Q \& D$
16. Dulcinea es bella pero don Quijote es feo.	$B \& F$
17. Dulcinea es bella y lista pero don Quijote es tonto.	$[B \& L] \& T$
18. Si don Quijote es tonto y feo, soy el rey de China.	$[T \& F] > C$
19. Soy el rey de China si don Quijote es tonto o feo.	$[T \vee F] > C$
20. Si no soy el rey de China, Dulcinea es bella.	$\sim R > D$
21. Si don Quijote es tonto pero no feo, estoy contento.	$[T \& \sim F] > C$
22. Estoy contento si don Quijote es feo pero no tonto.	$[F \& \sim T] > C$
23. Veo el arcoiris si llueve y hay sol.	$[L \& S] > V$
24. Me mojo si llueve y si es cierto que si llueve me mojo.	$[L \& [L > M]] > M$
25. Muero si muero o vivo y no vivo.	$[[M \vee V] \& \sim V] > M$
26. Si muero o no muero y no muero entonces muero.	$[[M \vee \sim M] \& \sim M] > M$

* UNIDAD DE EJERCICIOS 1: TRADUCCIÓN

A. Traduzca las siguientes expresiones de nuestro sistema de todas las maneras posibles y, si alguna expresión no es traducible, indíquelo escribiendo "no". Algunas respuestas se dan. En el caso de una implicación, por ejemplo:

Dulcinea se pone triste (D) si Rocinante está enfermo (R)

tenga cuidado de poner la cláusula condicional (la gobernada por "si") *antes* (a la izquierda) de la otra cláusula:

$R > D$ (no $D > R$)

A1. Hay sol y la tierra está seca.
A2. Llueve. *L*
A3. No llueve.
A4. Lluvia. (no se puede traducir)
A5. Está lloviendo.
A6. La tierra seca.
A7. ¡Seca la ropa!
A8. La tierra está seca ahora.
A9. Hace sol.
A10. La tierra está seca (*T*) si hay sol (*S*). $S > T$
A11. Si la tierra está seca, hay sol.
A12. Si está seca la tierra, hace sol.
A13. Estar lloviendo mucho.
A14. Hay sol si la tierra está seca.
A15. Lloviendo.
A16. Si llueve y hay sol puedes ver el arcoiris.
A17. Puedes ver el arcoiris si llueve y hay sol.
A18. Si nieva, entonces Jaime tiene frío y se resfría.
A19. Rocinante tiene frío y se resfría si nieva. $N > [F \& R]$
A20. Si hace frío, hace frío.
A21. Hace frío o hace frío.
A22. Hace frío y hace frío.
A23. Si hace frío, entonces si hace frío, hace frío.
A24. De hacer frío, la tierra está seca.
A25. Si hace frío, entonces si hace calor, hace frío.
A26. $2 + 2 = 4$.
A27. Dos más dos son cuatro.
A28. $2 + 2 = 5$. *D*
A29. Alemania está en México.
A30. Alemania no está en México.
A31. Dulcinea rompe con don Quijote pero se casa con Sancho.
A32. Dulcinea rompe con don Quijote y Dulcinea se casa con Sancho.
A33. Dulcinea rompe con don Quijote si ella se casa con Sancho.
A34. Quiero irme a casa.
A35. Si Dulcinea rompe con don Quijote y se casa con Sancho, entonces don Quijote está feliz o Sancho está feliz.
A36. Dulcinea y María estarán contentas.
A37. Dulcinea estará feliz y María está feliz.
A38. Dulcinea está feliz y seguirá siéndolo.
A39. Si $a + b = b + a$ y si $a = 2$ y $b = 3$, entonces $2 + 3 = 3 + 2$.
A40. ¡Lárgate!
A41. Ser o no ser.

A42. Seré o no seré.
A43. El tosul está ahora en el mopote.
A44. La muy inquietante perspectiva de otra guerra mundial.
A45. No es probable la verdaderamente inquietante perspectiva de una tercera guerra mundial.
A46. ¡Arriba las manos!
A47. ¿Salen ustedes esta noche?
A48. ¡Qué noche más bella!
A49. Mesa la sobre azul Rocinante está.
A50. Rocinante y don Quijote son geniales.
A51. Rocinante es alto o gordo. $A \vee G$
A52. Rocinante y don Quijote son altos y gordos.
A53. Si, si Dulcinea llora relincha Rocinante, y si Rocinante relincha se pone nervioso don Quijote, entonces si Dulcinea llora don Quijote se pone nervioso.

B. Notación polaca: transcriba en símbolos polacos los números 3, 10, 16, 18, 35 y 53 anteriores.

C. En 53, compare (en cuanto a la sencillez) la oración española con la fórmula que la representa.

D. Circuitos electrónicos

D1. Haga un circuito que represente la equivalencia (coimplicación): $p <> a$.
D2. Haga y compare los circuitos que representen:

$p \& [q \vee r]$
$[p \& q] \vee r$

D3. Haga un circuito que represente la implicación: $p > q$.

1.2 Reglas de cálculo proposicional

1.2.1 Las reglas y el metalenguaje

La lógica funciona con base en reglas, las cuales nos permiten colocar nuevos pasos en una prueba formal, deduciéndolos de pasos previos. La estrategia de resolver pruebas es esencialmente la capacidad de reconocer pautas en que una regla es aplicable.

Expresamos las reglas con las letras *mayúsculas* de la primera parte del alfabeto: A, B, C, etc. Estos símbolos no expresan proposiciones (o esto puede asumirse) sino que se refieren a otros símbolos —constantes o variables—, los cuales a su vez expresan proposiciones. Por ejemplo, A es remplazable por los símbolos p, q, S ("hay sol"), B ("don Quijote besa a Dulcinea"), C ("2 + 2 = 4"), etc. A y B se llaman metasímbolos y el sistema de tales símbolos se llama *metalenguaje*. Los símbolos que expresan proposiciones (tales como p, q, S, B, C) pertenecen al *lenguaje-objeto*, en contraste con el metalenguaje, cuyos símbolos se refieren a los del lenguaje-objeto. Podemos hablar, pues, de dos niveles

lingüísticos, que los lógicos escolásticos llamaban términos de primera (lenguaje-objeto) y de segunda intensión (metalenguaje):

metalenguaje	A, B, C
lenguaje-objeto	$S, B, C\ (p, q, r)$
proposiciones	

Todas las reglas (con la excepción de las semirreglas, 1.2.2) se clasifican en pares: de *introducción* y de *eliminación* (tales reglas a veces se llaman "intelimas").

1.2.2 Las semirreglas

Hay tres "semirreglas" sencillas, las cuales no son de introducción o eliminación:

1. **h**: *hipótesis*. Cada paso encima de la rayita de un secuente hipotético será justificado por "**h**". Tales proposiciones son presuposiciones del argumento y se llaman "premisas". Éstas son las condiciones de la prueba en el sentido de que *si* son V, los pasos de abajo (que se siguen de ellas lógicamente) también son V. Porque las hipótesis no se remiten a pasos anteriores, ningún número acompaña la "**h**" de la justificación. La regla se expresa así:

1	A	**h**
	⊢	

Puede haber cualquier número de hipótesis:

1	p
2	$s > [r \& q]$
	...
	⊢

2. **r**: *repetición*. Cada paso puede repetirse las veces que se quiera, y hay que poner el número del paso repetido:

1	A	
	⊢	
2	A	1 **r**

Generalmente la repetición no ayuda para resolver las pruebas (hay excepciones) y su uso puede ser una simple petición de principio (ver la introducción). Veremos un ejemplo de su uso correcto (1.3.2). Los alumnos que comienzan a estudiar la lógica tienen la tendencia a emplear "**r**" demasiado.

El uso más frecuente de la repetición es la *definición*, cuando se repite una fórmula en su forma abreviada o al revés. En este caso escribimos "$_{df}$" después de "**r**": $\mathbf{r}_{df}$. La regla en este caso sería:

$\mathbf{r}_{df}$: repetición según una definición: donde $A =_{df} B$:

1	A	
2	B	1 $\mathbf{r}_{df}$

1	B	
2	A	1 $\mathbf{r}_{df}$

Por ejemplo, definiremos o abreviaremos $[p > q]$ & $[q > p]$ como "$p <> q$" (1.5.1), y mediante la regla $\mathbf{r}_{df}$ permitimos que se escriba la forma larga en vez de la corta y la corta en vez de la larga:

1	$p <> q$	**h**
2	$[p > q]$ & $[q > p]$	1 $\mathbf{r}_{df}$

1	$[p > q]$ & $[q > p]$	**h**
2	$p <> q$	1 $\mathbf{r}_{df}$

3. **i**: *iteración*. Cualquier paso puede iterarse en una subprueba (categórica o hipotética) con tal que la iteración se haga: *1*) a la *derecha*, *2*) para *abajo*, y *3*) en una subprueba que esté *abarcada* por el secuente de donde viene la fórmula iterada.

1	A	
2	$\quad A$	1 **i**

Permitimos que una proposición se itere en dos subpruebas a la vez:

1	A	
2		
3	$\quad\quad A$	1 **i**

Esta operación es un atajo; en realidad estamos iterando la proposición en cada subprueba:

1	A	
2	$\quad A$	1 **i**
3	$\quad\quad A$	2 **i**

Es importante recordar que se trata de un atajo, pues en otras partes de la lógica (predicativa, modal; 2.3.5, etc.) impondremos más restricciones en la iteración, y al iterar una proposición en más de una subprueba al mismo tiempo, debemos observar las restricciones (si las hay) de cada una.

1.3 Implicación

1.3.1 La regla *modus ponens*

Las reglas de la implicación, como las otras relaciones proposicionales, son de introducción y de eliminación. La regla de eliminación es:

mp: *modus ponens* ("*modus ponendo ponens*")

Es la expresión latina para decir: "la regla según la cual se afirma el consecuente de una implicación al afirmarse su antecedente"):

1	$A > B$	
2	A	
3	B	1, 2 **mp**

Un ejemplo de constantes; aquí L: "llueve" y M: "me mojo" (en la regla, A es reemplazada por L y B por M):

1	$L > M$	**h**
2	L	**h**
3	M	1, 2 **mp**

Si es cierto que si llueve me mojo y también que llueve, puedo concluir que me mojo. No es necesario que la implicación aparezca primero; pudiéramos haber escrito la regla:

1	L	**h**
2	$L > M$	**h**
3	M	1, 2 **mp**

El orden de las premisas, pues, es indiferente. Tampoco importa si hay proposiciones entre las dos fórmulas en las que opera el **mp** o entre ellas y la fórmula que éste justifica:

1	r	**h**
2	s	**h**
3	t	**h**
4	$s > q$	**h**
5	p	**h**
6	q	2, 4 **mp**

No es necesario repetir los pasos 2 y 4 para que se queden juntos antes de la aplicación de **mp**.

A y *B* en una regla pueden por supuesto aludir a proposiciones moleculares:

1	$[p > q] > r$	**h**
2	$p > q$	**h**
3	r	1, 2 **mp**

1.3.2 La regla de la introducción de la implicación

ii: *introducción de la implicación*

La regla **ii** exige el uso de un secuente subordinado, e. d., de una subprueba. Si hay en la parte inferior de una prueba una implicación que queremos justificar (un caso muy común), hacemos lo siguiente: *1*) escribimos una subprueba hipotética (para arriba), *2*) colocamos el antecedente de la implicación como hipótesis de la subprueba, y *3*) ponemos el consecuente de la implicación como el último paso de la subprueba. Se trata entonces de justificar este último paso. La regla se expresa así:

1	A	**h**
	...	
n	B	¿?
$n+1$	$A > B$	1-n **ii**

Note que se refiere a una subprueba escribiendo el número de su primer paso y después un guión con el número de su último paso.

Un ejemplo es la prueba de la repetición condicionada: $p > [q > p]$ (note que lo que se quiere demostrar en una prueba formal es la conclusión, el último paso):

1	p	**h**
2	q	**h**
3	p	1 **i**
4	$q > p$	2-3 **ii**
5	$p > [q > p]$	1-4 **ii**

El siguiente ejemplo contiene proposiciones negativas, pero no necesita sino reglas de la implicación:

1	p	**h**
2	$\sim p$	**h**
3	p	1 **i**
4	$\sim p > p$	2-3 **ii**
5	$p > [\sim p > p]$	1-4 **ii**

La regla **ii** es una forma del "teorema de la deducción" o del "principio de la condicionalización" desarrollado probablemente por los lógicos estoicos y últimamene por G. Gentzen y S. Jaśkowski.[31]

1.3.3 Estrategia

En el caso de **mp** se trabaja "para abajo":

1	$p > q$	**h**
2	p	**h**
	¿?	(**mp**)

pero frecuentemente se encuenta abajo el paso que queremos justificar con **mp**. En el caso de **ii** se trabaja "para arriba":

¿?	
$p > q$	(**ii**)

Veamos más de cerca la prueba de la repetición condicionada de arriba:

[31] Fitch, *Symbolic Logic*, p. 30, W. y M. Kneale, *The Development of Logic*, p. 538 y ss, B. Mates, p. 538 y ss y *Stoic Logic*, p. 70.

- Comenzamos con la tautología que queremos demostrar:

$$p > [q > p]$$

- Primero se escribe la proposición a probar como último paso de una prueba categórica (pues carece de la rayita ⊢):

$$\begin{array}{|l}
p > [q > p]
\end{array}$$

Es un error común de los principiantes olvidarse de este secuente categórico y escribir inmediatamente la subprueba que corresponde a la regla **ii**.

- Después se construye una subprueba encima del último paso y se pone a la derecha "**ii**" y el primer número de la subprueba (ya lo sabemos en este caso, pues resulta ser el primer paso de la prueba):

$$\begin{array}{l|ll}
1 & \quad p & \mathbf{h} \\
 & \quad \vdash & \\
 & \quad ¿? & \\
 & \quad q > p & \\
 & p > [q > p] & 1\text{-}¿?\ \mathbf{ii}
\end{array}$$

- Pero porque queda otra implicación abajo por justificar ($q > p$), repetimos el mismo proceso, escribiendo otra subprueba con el nombre de la regla (**ii**) y el número 2 (porque 2 es el primer número de esta subprueba):

$$\begin{array}{l|ll}
1 & \quad p & \mathbf{h} \\
 & \quad \vdash & \\
2 & \quad\quad q & \mathbf{h} \\
 & \quad\quad \vdash & \\
 & \quad\quad ¿? & \\
 & \quad\quad p & \\
 & \quad q > p & 2\text{-}¿?\ \mathbf{ii} \\
 & p > [q > p] & 1\text{-}¿?\ \mathbf{ii}
\end{array}$$

- Pero ya vemos que p puede ser justificado simplemente iterando el paso 1, y tenemos la prueba completa de arriba.

Tomemos un ejemplo más complejo; queremos probar:

$$q > [[[p > q] > r] > r]$$

Escribimos las dos subpruebas que corresponden a los dos usos de la regla **ii**:

1	q	**h**
2	$[p > q] > r$	**h**
	...	
	r — ¿cómo justificar?	
	$[[p > q] > r] > r$	2-¿? **ii**
	$q > [[[p > q] > r] > r]$	1-¿? **ii**

Ahora el problema es ¿cómo justificar r? Se ve inmediatamente que *si tuviéramos* $p > q$, podríamos sacar r con *modus ponens* a partir del segundo paso $[p > q] > r$. Escribimos $p > q$ abajo, a ver si lo podemos justificar:

1	q	**h**
2	$[p > q] > r$	**h**
	...	
	$p > q$ — ¿cómo justificar?	
	r — justificable con **mp**	
	$[[p > q] > r] > r$	2-¿? **ii**
	$q > [[[p > q] > r] > r]$	1-¿? **ii**

Evidentemente podemos justificar $p > q$ con **ii**, por ser una implicación que se encuentra abajo; escribimos, pues, su subprueba para arriba:

1	q	**h**
2	$[p > q] > r$	**h**
3	p	**h**
	...	
	q	
	$p > q$	3-¿? **ii**
	r — justificable con **mp**	
	$[[p > q] > r$	2-¿? **ii**
	$q > [[[p > q] > r] > r]$	1-¿? **ii**

Finalmente, q se justifica fácilmente iterándolo del primer paso, y la prueba está completa:

1	q	**h**
2	$[p > q] > r$	**h**
3	p	**h**
4	q	1 **i**
5	$p > q$	3-4 **ii**
6	r	2, 5 **mp**
7	$[[p > q] > r] > r$	2-6 **ii**
8	$q > [[[p > q] > r] > r]$	1-7 **ii**

La siguiente prueba muestra el uso de la repetición (1.2.2):

1	$[s > s] > t$	**h**
2	...	
	$s > s$	— ¿cómo justificar?
	t	— justificable con **mp**
	$[[s > s] > t] > t$	1-¿? **ii**

Desde luego que la implicación puede justificarse con **ii**:

1	$[s > s] > t$	**h**
2	s	**h**
3	s	2 **r**
4	$s > s$	2-3 **ii**
5	t	1, 4 **mp**
6	$[[s > s] > t] > t$	1-5 **ii**

El tercer paso es el resultado de repetir el segundo.

* UNIDAD DE EJERCICIOS 2: LAS REGLAS **ii, mp**

Estos ejercicios presuponen las semirreglas y las reglas de la implicación.

A. Saque cualquier consecuencia que pueda y escríbala abajo con número de paso y justificación (regla y referencia numérica):

A1.

1	p
2	$p > q$
	¿?

A2.

1	$A > B$
2	B
	¿?

A3.

1	$r > t$
2	r
	¿?

A4.

1	$r > [s \& s]]$
2	r
	¿?

A5.

1	p
2	r
3	$p > s$
	¿?

A6.

1	$s > t$
2	p
3	t
4	s
5	$q \& q$
	¿?

A7.

1	$[p > [q \& s]] > [r \vee p]$
2	p
3	$p > q$
4	$p > [q \& p]$
5	$r \vee p$
6	$p > [q \& s]$
	¿?

B. Resuelva estas pruebas hipotéticas, comenzando con las premisas y derivando el último paso (la conclusión).

B1.

1	p
	...
	$q > p$

B2.

1	$q > r$
	...
	$[p > q] > [p > r]$

B3.

1	$p > q$
2	$q > r$
	...
	$p > r$

B4.

1	$s > p$
2	$s > [p > q]$
	...
	$s > q$

B5.

1	$s > [p > [q > r]]$
	...
	$s > [[p > q] > [p > r]]$

C. Resuelva estas pruebas categóricas (haga el secuente principal, escriba abajo la proposición que hay que probar y derívela):

C1. $p > [q > p]$ (compárese con 1 arriba)
C2. $[q > r] > [[p > q] > [p > r]]$ (compárese con 2)
C3. $[s > [p > [q > r]]] > [s > [[p > q] > [p > r]]]$ (con 5)
C4. $[q > q] > [p > [q > q]]$
C5. $[p > [q > p]] > [r > [p > [q > p]]]$
C6. $[[r > [s > r]] > p] > p$ (¡piense!)
C7. $p > [q > [r > p]]$
C8. $[s > p] > [s > [r > p]]$
C9. $[p > [p > q]] > [p > q]$
C10. $[p > [q > r]] > [q > [p > r]]$

D. Formalice y resuelva estas pruebas (2 hipotéticas, una categórica):

D1.
1 | Si llueve, la tierra está mojada.
2 | Llueve.
| ⊢
| ...
| La tierra está mojada.

D2.
1 | 2 + 2 = 4
| ⊢
| ...
| Si voy, 2 + 2 = 4

D3. Si voy, entonces si voy, voy.

E. Resuelva estas pruebas hipotéticas:

E1.
1 | $r > s$
2 | $[p > p] > [q > r]$
| ⊢
| ...
| $q > s$

E2.
1 | p
2 | $[q > p] > [p > r]$
| ⊢
| ...
| r

E3.

1	$s > t$
	...
	$s > [r > t]$

E4.

1	$s > p$
2	$q > r$
	...
	$[p > [s > q]] > [s > r]$

E5.

1	$p > [q > [r > [s > t]]]$
	...
	$s > [r > [s > [q > [p > t]]]]$

F. Resuelva estas pruebas categóricas:

F1. $[p > [q > r]] > [[p > q] > [p > r]]$
F2. $p > [[p > [p > q]] > q]$
F3. $[p > [q > [r > s]]] > [q > [[r > p] > [r > s]]]$
F4. $[p > q] > [[q > r] > [s > [[s > p] > r]]]$
F5. $[[[p > q] > r] > s] > [p > [q > [r > s]]]$
F6. $[p > q] > [[r > s] > [[q > r] > [p > s]]]$

G. Escriba las pruebas 3 y 5 como pruebas categóricas.

H. Explique lo que quiere decir la repetición condicionada ($p > [q > p]$).

1.4 Conjunción

1.4.1 La regla de la eliminación de la conjunción

ec: *eliminación de la conjunción*

Puede expresarse en dos formas:

1	$A \& B$	
2	A	1 **ec**

1	$A \& B$	
2	B	1 **ec**

Se puede desprender, pues, cada parte de una conjunción. Un ejemplo con constantes (*S*: "hace sol", *L*: "llueve"):

1	$S \& L$	**h**
2	L	**h**

Un ejemplo con variables:

1	r	**h**
2	$s \& q$	**h**
3	t	**h**
4	q	2 **ec**

1.4.2 La regla de la introducción de la conjunción

ic: *introducción de la conjunción*

Puede expresarse en dos formas:

1	A	
2	B	
3	$A \& B$	1, 2 **ic**

1	A	
2	B	
3	$B \& A$	1, 2 **ic**

Se pueden combinar dos fórmulas en cualquier orden para formar una conjunción. Un ejemplo (I: "se ve el arcoiris"):

1	S	**h**
2	L	
3	$[S \& L] > I$	**h**
4	$S \& L$	1, 2 **ic**
5	I	3, 4 **mp**

1.4.3 Estrategia

En el caso de **ec**, se trabaja "para abajo": si hay una conjunción arriba (ya justificada), casi siempre conviene romperla inmediatamente con **ec**. Sin embargo, no siempre hay que desprender los dos conyuntos, cuando se necesita uno solo para completar la prueba o una parte de ella. Con **ic** se trabaja "para arriba": para derivar una conjunción que está abajo (todavía no está justificada),

¿?	
$p \& q$	**(ic)**

hay que justificar cada conyunto por separado y reunirlos mediante **ic**:

	...	
n	p	¿?
	...	
m	q	¿?
	$p \& q$	n, m **ic**

* UNIDAD DE EJERCICIOS 3: LAS REGLAS **ic**, **ec**, **ii**, **mp**

Estos ejercicios presuponen las semirreglas y las reglas de la implicación y de la conjunción.

A. Resuelva estas pruebas:

A1.

1	p
2	r
3	q
	...
	$p \& q$

A2.

1	s
2	t
3	p
	...
	$t \& s$

A3.

1	p
2	q
3	r
4	s
	...
	$p \& p$

A4. $[p \& q] > q$
A5. $[p \& q] > p$
A6. $[p \& q] > [q \& p]$
A7. $[[p \vee q] \& r] > [r \& [p \vee q]]$
A8. $[[p \& q] \& r] > [p \& [q \& r]]$
A9. $[p > [q > r]] > [[p \& q] > r]$
A10. $[[p \& q] > r] > [p > [q > r]]$
A11. $[[p > q] \& [q > r]] > [p > r]$
A12. $p > [p \& p]$
A13. $[p \& p] > p$
A14. $[[p \& q] \& [p > r]] > [[[p > q] \& r] \& [q \& p]]$
A15. $[p > q] > [[r \& p] > q]$
A16. $[p \& [p > q]] > q$
A17. $[p \& q] > [[[p \& q] > r] > [q \& r]]$
A18. $[[p > q] \& [p > r]] > [p > [q \& r]]$
A19. $[p > [q \& r]] > [[p > q] \& [p > r]]$
A20. $[[[p \& q] \& [p > r]] \& [q > s]] > [r \& s]$
A21. $[p > [q > [r > s]]] > [[[p \& q] \& r] > s]$
A22. $[[p \& [q \& r]] > s] > [p > [q > [r > s]]]$
A23. $[[p > q] \& [r > s]] > [[p \& r] > [q \& s]]$
A24. $[[p > q] > [r > s]] > [[p \& r] > [q > s]]$

B. Traduzca al simbolismo y resuelva:

B1.
1 Llueve y nieva.
2 Si llueve estoy contento.
...
Estoy contento.

B2.
1 Juan es alto pero flaco.
2 Juan pierde si es flaco.
3 Si Juan pierde, está triste.
...
Juan está triste.

B3.
1 Si toses estás agripado y sufres.
2 Toses.
3 Si sufres, perseverarás.
...
Estás agripado pero perseverarás.

1.5 Coimplicación (equivalencia)

1.5.1 Definición

La coimplicación o equivalencia puede definirse en términos de la implicación y la conjunción; e. d., $p <> q$ puede tomarse como abreviatura de $[p > q]$ & $[q > p]$. Tal oración también se llama "bicondicional". En símbolos:

$$p <> q =_{df} [p > q] \text{ y } [q > p]$$

donde $=_{df}$ significa "se define como", "es abreviatura de".

Por lo tanto, todo lo que podemos probar usando las reglas de la coimplicación, lo podemos probar usando las reglas de la conjunción, la implicación y la semirregla de la repetición $\mathbf{r}_{df}$. Hay que usar $\mathbf{r}_{df}$ porque tenemos que repetir la abreviatura $p <> q$ en su forma larga $[p > q]$ & $[q > p]$ y ésta en su forma corta (1.2.2).

1.5.2 La regla de la eliminación de la coimplicación

La regla en realidad son dos usos de **mp**:

eci: *eliminación de la coimplicación*

Puede expresarse en dos formas:

1	$A <> B$	**h**
2	A	**h**
3	B	1, 2 **eci**

1	$A <> B$	**h**
2	B	**h**
3	A	1, 2 **eci**

Un ejemplo:

1	s	**h**
2	$q <> s$	**h**
3	q	1, 2 **eci**

No hay que confundir **eci** con el "*modus ponens* falso" (14.1.2). En la prueba de arriba podemos derivar q de los primeros dos pasos porque el segundo es una *co*implicación ($q <> s$ incluye $s > q$). Si fuera una implicación, no se permitiría:

NO:	1	s	**h**
	2	$q > s$	**h**
	3	q	— ERROR (*modus ponens* F)

Podemos resolver la misma prueba sin usar **eci**, de esta manera:

1	s	**h**
2	$q <> s$	**h**
3	$[q > s]$ & $[s > q]$	2 $\mathbf{r}_{\mathbf{df}}$
4	$s > q$	2 **ec**
5	q	1, 4 **mp**

1.5.3 La regla de la introducción de la coimplicación

ici: *introducción de la coimplicación*:

La regla representa esencialmente dos usos de **ii**:

1	A	**h**
	...	
n	B	
$n+1$	B	**h**
	...	
k	A	
$k+1$	$A <> B$	$1-n, n+1-k$ **ici**

Si se quiere, pueden colocarse las subpruebas, una al lado de la otra:

1	A **h**	$n+1$	B **h**	
	...		...	
n	B	k	A	
$k+1$	$A <> B$			$1-n, n+1-k$ **ici**

1.5.4 Estrategia

Existe un paralelismo entre **eci** y **mp** y entre **ici** e **ii**. En los dos casos se trabaja "de arriba para abajo". El uso de **ici** para justificar una coimplicación es tan rutinario como usar **ii** para justificar una implicación, pues es muy frecuente la necesidad de demostrar que dos fórmulas son equivalentes.

* UNIDAD DE EJERCICIOS 4: LAS REGLAS **ici**, **eci**, **ic**, **ec**, **ii**, **mp**

Estos ejercicios presuponen las semirreglas y las reglas de la implicación, conjunción y coimplicación.

A. Resuelva estos ejercicios:

A1. $p <> p$ (trate de resolverlo de dos maneras)
A2. $[p <> q] <> [q <> p]$ (¿qué significa esta fórmula?)

A3.
$$\begin{array}{r|l} 1 & p <> q \\ 2 & q <> r \\ & \vdash \\ & \ldots \\ & p <> r \end{array}$$

A4. $[[p <> q] \& [q <> r]] > [p <> r]$ (compárese con A3)
A5. $[p \& r] <> [r \& p]$ (¿qué significa esta fórmula?)

A6.
$$\begin{array}{r|l} 1 & p <> q \\ 2 & r <> s \\ & \vdash \\ & \ldots \\ & [p > r] <> [q > s] \end{array}$$

A7. $[p > [q > [p > r]]] <> [[q \& p] > r]$
A8. $[[p > q] > [p > r]] <> [p > [[p > q] > r]]$
A9. $[p <> [p \& q]] <> [p > q]$
A10. $[p <> q] > [[r \& p] <> [r \& q]]$
A11. $[p <> q] > [[r > p] <> [r > q]]$
A12. $[[q <> p] \& [q > r]] > [p > r]$
A13. $[[p <> [q \& r]] \& [r <> [s \& t]]] > [p <> [q \& [s \& t]]]$
A14. $[[[p \& q] > s] \& [[p \& s] > q]] <> [p > [s <> q]]$
A15. $q > [q <> [p > p]]$ (¿qué significa esta fórmula?)
A16. $[[p <> q] \& [r <> s]] > [[p <> r] <> [q <> s]]$

B. ¡Usted es el detective! ¿Quién asesinó a la condesa? He aquí 5 "pistas", las cuales son las premisas (hipótesis) de una prueba formal. *Usted mismo* tiene que sacar la conclusión (el último paso), el cual debe ser o S ("la sobrina mató a la condesa") o M ("el mayordomo mató a la condesa"), o H ("Sherlock Holmes asesinó a la condesa") —o alguna conjunción de S, M y H (si hay más de un asesino)—. Puede traducir "el perro ladró" con P, "el reloj del comedor fue atrasado a propósito" con R y "la condesa se acostó a las once" con A.

1	Si la sobrina mató a la condesa, el perro ladró.
2	Si el mayordomo mató a la condesa, el perro ladró.
3	La sobrina mató a la condesa si el reloj del comedor fue atrasado a propósito.
4	Si el perro ladró y si la condesa se acostó a las once, entonces Sherlock Holmes asesinó a la condesa.
5	El reloj del comedor fue atrasado a propósito y la condesa se acostó a las once.
	...
	¿?

1.6 Disyunción

1.6.1 La regla de la eliminación de la disyunción

ed: *eliminación de la disyunción*

1	$A \vee B$	
m	$\quad A$	
	$\quad$ ...	
n	$\quad C$	
$n+1$	$\quad B$	
	$\quad$ ...	
k	$\quad C$	
$k+1$	C	$1, m-n, n+1-k$ **ed**

La regla tiene la forma de un dilema. Digamos, p. ej., que falta gasolina (F) o la batería está muerta (B); en ambos casos no arranca el motor ($\sim A$):

1	$F \vee B$	**h**
2	$F > \sim A$	**h**
3	$B > \sim A$	**h**
4	F	**h**
5	$F > \sim A$	2 **i**
6	$\sim A$	4, 5 **mp**
7	B	**h**
8	$B > \sim A$	3 **i**
9	$\sim A$	7, 8 **mp**
10	$\sim A$	1, 4-6, 7-9 **ed**

Como en el caso de **ici**, las subpruebas de **ed** pueden colocarse una al lado de la otra.

1.6.2 La regla de la introducción de la disyunción

id: *introducción de la disyunción*

Puede expresarse en dos formas:

1	A	
2	$A \vee B$	1 **id**

1	A	
2	$B \vee A$	1 **id**

Si una proposición es V, podemos agregarle una cuña y *cualquier* otra proposición, aunque sea ésta F, pues basta que un disyunto sea V para que toda la disyunción sea V. Un ejemplo (C: 2 + 2 = 4; S: soy el rey de China):

1	C	**h**
2	$S \vee C$	1 **id**

pues si dos más dos son cuatro, entonces lo son o (no "y") soy yo el rey de China.

1.6.3 Estrategia

En los dos casos, el de **id** y el de **ed**, se trabaja "para abajo". Los principiantes a veces son renuentes a usar **id**, quizás porque es tan sencillo. También existe una confusión cuando *C* mismo, conclusión de la regla **ed**, es una disyunción, pues parece paradójico usar la regla de la eliminación de la disyunción para introducir una disyunción (evidentemente la que se elimina es la de arriba). Un ejemplo sería la simetría de la disyunción (q v p corresponde a *C* en la regla):

1	p v q	**h**
2	p	**h**
3	q v p	2 **id**
4	q	**h**
5	q v p	4 **id**
6	q v p	1, 2-3, 4-5 **ed**

Cuando hay una disyunción ya justificada arriba, si no pueden usarse **mp**, **ii** ni **ec**, casi siempre vale la pena aplicarle **ed** inmediatamente.

* UNIDAD DE EJERCICIOS 5: LAS REGLAS **id**, **ed**, **ici**, **eci**, **ic**, **ec**, **ii**, **mp**

Estos ejercicios presuponen las semirreglas y las reglas de la implicación, conjunción, coimplicación y disyunción.

A. Resuelva estas pruebas:

A1. $s > [t \text{ v } s]$
A2. $s > [s \text{ v } r]$
A3. $[p \text{ v } q] <> [q \text{ v } p]$ (simetría de la disyunción)
A4. $[[p \text{ v } q] \text{ v } r] <> [p \text{ v } [q \text{ v } r]]$ (asociación de la disyunción)
A5. $[p \text{ \& } [q \text{ v } r]] <> [[p \text{ \& } q] \text{ v } [p \text{ \& } r]]$

A6.

1	$[p > r] \text{ \& } [q > r]$
	...
	$[p \text{ v } q] > r$

A7. 1 | $[p \vee q] > r$

| ...

| $[p > r] \& [q > r]$

A8. $[[r \& s] \vee r] > r$

A9. 1 | $p \vee q$ (dilema constructivo complejo)

2 | $p > r$

3 | $q > s$

| ...

| $r \vee s$

A10. $[[r \& p] \vee [q \& s]] > [r \vee s]$

A11. $[[p \vee q] <> q] <> [p > q]$

A12. 1 | $[p \& r] > q$

2 | $p > [q \vee r]$

| ...

| $p > q$

A13. $[[p \& q] \vee q] <> q$

A14. $[[p \& q] \vee [q \& r] \vee [r \& p]] <> [[p \vee q] \& [q \vee r] \& [r \vee p]]$

B. Traduzca y resuelva:

B1. Si llueve, entonces llueve o soy el rey de China.

B2. Si soy alto y flaco, entonces soy flaco y alto.

B3. Premisas: *1*) El corazón se detiene o los pulmones dejan de funcionar. *2*) Si el corazón se detiene, se muere. *3*) Se muere si los pulmones dejan de funcionar. Conclusión: se muere.

B4. Premisa: Alberto es pequeño. Conclusión: Si Berta es alta, entonces Alberto es alto o pequeño.

1.7 Negación

1.7.1 Alcance de la tilde

Tenemos que usar corchetes "[ ]" cuando la negación debe afectar una proposición molecular como conjunto (1.1.2.3):

> En ~*Fx* v *Gx*, la fuerza de la tilde "~" se extiende sólo hasta la equis de *Fx*; no incluye la de *Gx*. "Gobierna" *Fx*, pero no *Gx*; *Fx* está, pero *Gx* no, en el "dominio" o el "alcance" de la tilde.
>
> En cambio, en ~[*Fx* v *Gx*] la fuerza de la tilde se extiende a las dos equis, tanto a la de *Fx* como a la de *Gx*. Las dos fórmulas atómicas, pues, están dentro del dominio de la tilde.

El manejo de la tilde en este respecto es igual al de los cuantificadores y los operadores modales (2.2.2).

1.7.2 La regla de la eliminación de la negación

eng: *eliminación de la negación* (eliminación de la contradicción)

1	*A*	
2	~*A*	
3	*B*	1, 2 **eng**

Note que los números se refieren a los pasos contradictorios (1 y 2).

El sentido es que una contradicción implica *cualquier* proposición, aunque sea ésta F. La regla se encuentra por primera vez en la historia de la lógica en el Pseudoescoto, autor de una lógica en el siglo XIV (ver la introducción); la expresa así:

> De cualquier oración que implica una contradicción formal se sigue cualquier otra oración por inferencia formal.[32]

Ofrece la siguiente defensa de su validez con la ayuda de otras reglas (abreviamos sus ejemplos originales: *S*: "Sócrates existe" y *B*: "un hombre es burro"); de la oración:

> "*S* y ~*S*", la cual incluye una contradicción formal, se sigue *B* o cualquier otra. Se demuestra de la siguiente manera. Vale "*P* y ~*S* luego ~*S*" por ser inferencia formal de una conjunción a una de sus partes. Entonces se guarda esta conclusión "[~*S*]". Después, vale "*S* y ~*S* luego *S*", por la misma

[32] "*Ad quamlibet propositionem implicantem contradictionem de forma sequitur quaelibet alia propositio in consequentia formali*", *In universam logicam quaestiones*".

regla. Y de S se sigue luego "S o B", porque cualquier proposición se infiere formalmente a sí misma con cualquier otra en una disyunción. Entonces se argumenta "S o B y $\sim S$ (la proposición antes guardada), luego B". Y como se argumenta de esta [oración] puede argumentarse de cualquier otra, pues todas las inferencias son formales.[33]

Su procedimiento, con uso de variables (pues dice que las inferencias son "formales") se representa así:

1	$p \& \sim p$	**h**
2	$\sim p$	1 **ec**
3	p	1 **ec**
4	$p \vee q$	3 **id**
5	q	2, 4 **sd**

donde **sd** es abreviatura de *silogismo disyuntivo* (1.9).

C. I. Lewis (1.7.2) presentó la misma demostración (ordenando los pasos 1, 3, 4, 2, 5) y también Kneale, Fitch, Haack y Hughes y Cresswell la reprodujeron. Se ha hecho hincapié en que no puede rechazarse la regla **eng** "por paradójico que parezca, sin rechazar algo esencial de la lógica" proposicional: las reglas de la eliminación de la conjunción, introducción de la disyunción o silogismo disyuntivo.[34] Hughes y Cresswell dicen que la demostración de la validez de **eng**

> ...muestra que el precio que hay que pagar por negar que $p \& \sim p$ entrañe q [principio de la eliminación de la negación] es el abandono de al menos uno de [los principios: eliminación de la conjunción, introducción de la disyunción o silogismo disyuntivo]. Francamente, este precio nos parece excesivamente alto, pues todos parecen ser intuitivamente sanos y el principio de que $p \& \sim p$ entraña q es, en el peor de los casos, inocente; en la práctica nunca podría despistarnos conduciéndonos de una premisa verdadera a una conclusión falsa, ya que ninguna proposición de la forma $p \& \sim p$ puede ser verdadera.[35]

Un efecto de **eng** es que una contradicción no puede ser paso en ningún secuente *principal*, pues haría el sistema inconsistente. Una contradicción, pues, sólo puede aparecer en una subprueba. Un ejemplo del uso de la regla:

1	p	**h**
2	$\sim p$	**h**
3	p	1 **i**
4	q	2, 3 **eng**
5	$\sim p > q$	2-4 **ii**
6	$p > [\sim p > q]$	1-5 **ii**

[33] Texto en W. y M. Kneale, pp. 281-282.

[34] W. y M. Kneale, *The Development of Logic*, 1962, pp. 281-282.; Fitch, pp. 55-56. (sin referirlo al Pseudoscoto; menciona a E. F. Schneider); Haack, p.197 (comenta a la crítica de los lógicos de la relevancia); G. E. Hughes y M. J. Cresswell, *An Introduction to Modal Logic*, 1972, p. 338 (apéndice 2).

[35] Agregan un cuarto principio, la transitividad de la implicación; hablan en efecto de la implicación estricta: $[p \& \sim p] \rightarrow q$; sobre la implicación en el Pseudoescoto véase J. Pinborg, *Logik und Semantik im Mittelalter*, 1972, pp. 174-175.

1.7.3 La regla de la introducción de la negación

ing: *introducción de la negación*

Puede expresarse en dos formas:

1	c	$\sim A$	**h**
		...	
		B	
n		$\sim B$	
n +1		A	1-n **ing**

1	c	A	**h**
		...	
		B	
n		$\sim B$	
$n + 1$		$\sim A$	1-n **ing**

El sentido es que hay que negar una proposición si su negación entraña una contradicción. Lo que queremos hacer en la subprueba, pues, es derivar una contradicción; para indicar esta intención, marcamos la subprueba con una c (letra que significa "en esta subprueba hay que derivar una contradicción).

Se ha llamado la tautología establecida en la siguiente prueba la *consequentia mirabilis* ("inferencia sorprendente"):

1		$\sim p > p$	**h**
2	c	$\sim p$	**h**
3		$\sim p > p$	1 **i**
4		p	2, 3 **mp**
5		p	2-4 **ing**
6		$[\sim p > p] > p$	1-5 **ii**

Aquí está un ejemplo de una prueba más difícil; es demostración de la "ley de Peirce":

1	$[p > q] > p]$	**h**
2	$c \quad \sim p$	**h**
3	$[p > q] > p]$	1 **i**
4	p	**h**
5	$\sim p$	2 **i**
6	q	4, 5 **eng**
7	$p > q$	2-6 **ii**
8	p	3, 7 **mp**
9	p	2-8 **ing**
10	$[[p > q] > p] > p$	1-9 **ii**

La contradicción en la subprueba de **ing** consta del paso 8 (p) y de la *hipótesis misma*, paso 2 ($\sim p$), como si la regla fuera sencillamente:

1	$c \quad A$	**h**
	...	
n	$\sim A$	
$n + 1$	$\sim A$	1-n **ing**

1.7.4 Las reglas de la doble negación

Podemos establecer la validez de $p <> \sim\sim p$ con la regla **ing**:

1	p	**h**
2	$c \quad \sim p$	**h**
3	p	1 **i**
4	$\sim\sim p$	2-3 **ing**
5	$\sim\sim p$	**h**
6	$c \quad \sim p$	**h**
7	$\sim\sim p$	5 **i**
8	p	6-7 **ing**
9	$p <> \sim\sim p$	1-4, 5-8 **ici**

Note que en las dos subpruebas (2-3 y 6-7), las hipótesis mismas (2 y 6) forman parte de la contradicción, como en la prueba de la ley de Peirce.

Podemos admitir, pues, estas reglas (derivadas) de la doble negación:

1. de eliminación

edn: *eliminación de la doble negación*:

1	$\sim\sim A$	**h**
2	A	1 **edn**

2. de introducción

idn: *introducción de la doble negación*:

1	A	**h**
2	$\sim\sim A$	1 **idn**

Con estas reglas es más sencillo establecer $p <> \sim\sim p$:

1	p	**h**
2	$\sim\sim p$ 1	**idn**
3	$\sim\sim p$	**h**
4	p	3 **edn**
5	$p <> \sim\sim p$	1-2, 3-4 **ici**

1.7.5 Estrategia

Evidentemente se trabaja "para abajo" en **eng** y "para arriba" en **ing**. Una regla empírica muy útil: si no se puede hacer nada más, e. d., cuando ninguna otra regla es aplicable (**ec**, **mp**, **ii**, **ici**, **ed**...) ¡use **ing**! En realidad *cualquier* proposición lógicamente V puede justificarse mediante **ing**.

Los principiantes a veces confunden las reglas **ing** y **eng** de la siguiente manera. Aplican **ing**, derivando correctamente dos pasos contradictorios en la subprueba, pero en vez de reconocer que su tarea ha terminado (la operación de **ing** está completa en cuanto aparece la contradicción), aplican **eng** a los pasos contradictorios para sacar otra proposición, procedimiento que no tiene sentido.

1.8 Las equivalencias de Ockham

Un conjunto de equivalencias que relacionan la disyunción, conjunción y negación aparece ya en una obra del lógico Guillermo de Ockham (siglo XIV), quien las presentó como si fueran generalmente conocidas. Las equivalencias suelen llamarse también "de De Morgan" ("**dm**"), porque se pensó que A. De Morgan, lógico inglés de mediados del siglo pasado, había sido el primero que las descubrió.

oc: *equivalencias de Ockham*

$$
\begin{array}{rcl}
A \,\&\, B & <> & \sim[\sim A \vee \sim B] \\
A \,\&\, \sim B & <> & \sim[\sim A \vee B] \\
\sim A \,\&\, B & <> & \sim[A \vee \sim B] \\
\sim A \,\&\, \sim B & <> & \sim[A \vee B] \\
A \vee B & <> & \sim[\sim A \,\&\, \sim B] \\
A \vee \sim B & <> & \sim[\sim A \,\&\, B] \\
\sim A \vee B & <> & \sim[A \,\&\, \sim B] \\
\sim A \vee \sim B & <> & \sim[A \,\&\, B]
\end{array}
$$

Se permite que estas equivalencias se usen como regla para introducir una fórmula de la otra equivalente. Llamamos a esta regla "equivalencias de Ockham" (**oc**). Un ejemplo de su uso:

1	$\sim[s \vee \sim r]$	**h**
2	$\sim s \,\&\, r$	1 **oc**
3	$\sim s \,\&\, r$	**h**
4	$\sim[s \vee \sim r]$	3 **oc**
5	$\sim[s \vee \sim r] <> [\sim s \,\&\, r]$	1-2, 3-4 **ici**

Es importante usar corchetes cuando se quiere negar una fórmula molecular (1.1.2.3, 1.7.1).

Las equivalencias de Ockham pueden derivarse en nuestro sistema, pero es mucho más fácil presuponerlas como reglas derivadas. Observe que es compleja la derivación de la proposición arriba sin usar las equivalencias como regla:

1		$\sim[s \vee \sim r]$	**h**
2	c	s	**h**
3		$s \vee \sim r$	2 **id**
4		$\sim[s \vee \sim r]$	1 **i**
5		$\sim s$	2-4 **ing**
6	c	$\sim r$	**h**
7		$s \vee \sim r$	6 **id**
8		$\sim[s \vee \sim r]$	1 **i**
9		r	6-8 **ing**
10		$\sim s \,\&\, r$	5, 9 **ic**
11		$\sim s \,\&\, r$	**h**
12		$\sim s$	11 **ec**
13		r	11 **ec**
14	c	$s \vee \sim r$	**h**
15		s	**h**
16		$\sim s$	12 **i**
17		$\sim[s \vee \sim r]$	15, 16 **eng**
18		$\sim r$	**h**
19		r	13 **i**
20		$\sim[s \vee \sim r]$	18, 19 **eng**
21		$\sim[s \vee \sim r]$	14, 15-17,18-20 **ed**
22		$\sim[s \vee \sim r]$	14-21 **ing**
23		$\sim[s \vee \sim r] <> [\sim s \,\&\, r]$	1-10, 11-22 **ici**

Note que se escoge $\sim[s \vee \sim r]$ con **ing** (pasos 17 y 20) porque al sacarse de las subpruebas con **ed** (paso 21) contradice $s \vee \sim r$ (paso 14).

Estratégicamente, hablando en general, una conjunción o disyunción negada ($\sim[\sim p \,\&\, q]$, $\sim[s \vee \sim t]$...), cuando aparece arriba hay que aplicarle la regla **oc** y cuando aparece abajo hay que introducirla con **ing**, pues de esta manera se puede trabajar con la fórmula positiva (no negada).

1.9 Reglas derivadas

Hemos visto que las reglas de la doble negación (**idn** y **edn**) son derivables de otras y que las equivalencias de Ockham pueden usarse como reglas. Otras, derivadas también, son muy servibles en la resolución de las pruebas formales. Aquí están algunas.

1. **mt**: *modus tollens* ("*modus tollendo tollens*", en latín para: "la regla según la cual se niega el antecedente de una implicación al negarse su consecuente):

1	$A > B$	**h**
2	$\sim B$	**h**
3	$\sim A$	1, 2 **mp**

Evidentemente tenemos estas variaciones:

1	$A > \sim B$	
2	B	
3	$\sim A$	1, 2 **mt**

1	$\sim A > B$	
2	$\sim B$	
3	A	1, 2 **mt**

1	$\sim A > \sim B$	
2	B	
3	A	1, 2 **mt**

Aquí está la prueba de la primera forma (en metalenguaje):

1		$A > B$	**h**
2		$\sim B$	**h**
3	c	A	**h**
4		$A > B$	1 **i**
5		B	3, 4 **mp**
6		$\sim B$	2 **i**
7		$\sim A$	3-6 **ing**

2. **sd**: *silogismo disyuntivo*

1	$A \vee B$	
2	$\sim A$	
3	B	1, 2 **sd**

1	$A \vee B$	
2	$\sim B$	
3	A	1, 2 **sd**

1	$\sim A \vee B$	
2	A	
3	B	1, 2 **sd**

1	$\sim A \vee B$	
2	$\sim B$	
3	A	1, 2 **sd**

1	$A \vee \sim B$	
2	$\sim A$	
3	$\sim B$	1, 2 **sd**

1	$A \vee \sim B$	
2	B	
3	A	1, 2 **sd**

1	$\sim A \vee \sim B$	
2	A	
3	B	1, 2 **sd**

1	$\sim A \vee \sim B$	
2	B	
3	A	1, 2 **sd**

Aquí está la prueba de la primera forma (en metalenguaje):

1	$A \vee B$	**h**
2	$\sim A$	**h**
3	$\quad A$	**h**
4	$\quad \sim A$	2 **i**
5	$\quad B$	3, 4 **eng**
6	$\quad B$	**h**
7	$\quad B$	6 **r**
8	B	1, 3-5, 6-7 **ed**

3. **conpos**: *contraposición*

$$A > B \quad <> \quad \sim B > \sim A$$
$$A > \sim B \quad <> \quad B > \sim A$$
$$\sim A > B \quad <> \quad \sim B > A$$
$$\sim A > \sim B \quad <> \quad B > A$$

Las equivalencias pueden usarse como regla (**conpos**); por ejemplo:

1	$p > \sim s$	**h**
2	$s > \sim p$	1 **conpos**

4. **ti**: *transitividad de la implicación*:

1	$A > B$	**h**
2	$B > C$	**h**
3	$A > C$	1, 2 **ti**

lo cual fácilmente se muestra:

1	$A > B$	**h**
2	$B > C$	**h**
3	$\quad A$	**h**
4	$\quad A > B$	1 **i**
5	$\quad B > C$	2 **i**
6	$\quad B$	3, 4 **mp**
7	$\quad C$	5, 6 **mp**
8	$A > C$	3-7 **ii**

1.10 Sumario de las reglas

Aquí está un resumen de las reglas y semirreglas del cálculo proposicional.

Semirreglas

Hipótesis

1	A	**h**

Repetición

1	A	
	A	1 **r**

Iteración

1	A	
	$\quad A$	**i**

Reglas

Introducción

Implicación

1	$\quad A$	
	$\quad \ldots$	
n	$\quad B$	
	$A > B$	
		1-n **ii**

Conjunción

1	A	
2	B	
	$A \,\&\, B$	1, 2 **ic**

Coimplicación

1	$\quad A$	$n+1$	$\quad B$	
	$\quad \ldots$		$\quad \ldots$	
n	$\quad B$	m	$\quad A$	
	$A \diamond B$			
				1-n, $n + 1$ - m **ici**

Eliminación

Implicación

1	A
2	$A > B$
	B **mp**

Conjunción

1	$A \& B$
	A 1 **ec**
	B 1 **ec**

Coimplicación

1	A
2	$A <> B$
	B
	1, 2 **eci**

1	B
2	$A <> B$
	A
	1, 2 **ece**

Introducción

Disyunción

1	A
	$A \vee B$
	1 **id**

1	A
	$B \vee A$
	1 **id**

Negación

1	c	A
		...
		B
n		$\sim B$
	$\sim A$	1-n **ing**

Doble negación

1	c	$\sim A$
		...
		B
n		$\sim B$
n	A	1-n **ing**

1	A
	$\sim\sim A$
	1 **idn**

Eliminación

Disyunción

1	$A \vee B$		
2	A	n+1	B
	...		...
n	C	m	C
	C 1, 2-n, n + 1 - m **ed**		

Negación

1	A
2	$\sim A$
	B 1, 2 **eng**

Doble negación

1	$\sim\sim A$
	A
	1 **edn**

Modus tollens

1	$A > B$
2	$\sim B$
	$\sim A$
	1, 2 **mt**

1	$A > \sim B$
2	B
	$\sim A$
	1, 2 **mt**

1	$\sim A > B$
2	$\sim B$
	A
	1, 2 **mt**

1	$\sim A > \sim B$
2	B
	A
	1, 2 **mt**

Silogismo disyuntivo

1	$A \vee B$	1	$A \vee B$	1	$\sim A \vee B$	1	$A \vee \sim B$	...
2	$\sim A$	2	$\sim B$	2	A	2	B	
	B 1, 2 **sd**		A 1, 2 **sd**		B 1, 2 **sd**		A 1, 2 **sd**	

Equivalencias

Equivalencias de Ockham

$$A \,\&\, B \;<>\; \sim[\sim A \vee \sim B]$$
$$A \,\&\, \sim B \;<>\; \sim[\sim A \vee B]$$
$$\sim A \,\&\, B \;<>\; \sim[A \vee \sim B]$$
$$\sim A \,\&\, \sim B \;<>\; \sim[A \vee B]$$
$$A \vee B \;<>\; \sim[\sim A \,\&\, \sim B]$$
$$A \vee \sim B \;<>\; \sim[\sim A \,\&\, B]$$
$$\sim A \vee B \;<>\; \sim[A \,\&\, \sim B]$$
$$\sim A \vee \sim B \;<>\; \sim[A \,\&\, B]$$

Contraposición

$$A > B \;<>\; \sim B > \sim A$$
$$A > \sim B \;<>\; B > \sim A$$
$$\sim A > B \;<>\; \sim B > A$$
$$\sim A > \sim B \;<>\; B > A$$

* UNIDAD DE EJERCICIOS 6: LAS REGLAS **ing**, **eng** (= CÁLCULO PROPOSICIONAL)

Estos ejercicios presuponen *todas* las reglas y semirreglas del cálculo proposicional (incluso las equivalencias de **oc**).

A. Resuelva:

A1. $p <> \sim\sim p$
A2. $p > [\sim p > q]$
A3. $[[p \vee q] \,\&\, \sim p] > q$
A4. $[[p \vee q] \,\&\, \sim q] > p$
A5. $[[p \vee \sim q] \,\&\, \sim p] > \sim q$
A6. $[[p \vee \sim q] \,\&\, q] > p$ } **ds**
A7. $[[\sim p \vee \sim q] \,\&\, p] > \sim q$
A8. $[\sim p <> q] <> [\sim q <> p]$ — **conpos**
A9. $[[\sim p > q] \,\&\, \sim q] > p$
A10. $[[p > \sim q] \,\&\, q] > \sim p$ } **mt**
A11. $[[\sim p > \sim q] \,\&\, q] > p$
A12. $[p > q] <> [\sim p \vee q]$ } equivalencias útiles
A13. $\sim[p > q] <> [p \,\&\, \sim q]$

B. Establezca la validez de las equivalencias de **oc** (en estas dos pruebas no puede usar **oc**; ¡sería emplear lo que quiere probar!):

B1. $[p \vee q] <> \sim[\sim p \,\&\, \sim q]$
B2. $[p \,\&\, q] <> \sim[\sim p \vee \sim q]$

C. Traduzca y resuelva:

C1. Premisas: *1*) La tierra está seca si no llueve. *2*) No llueve. Conclusión: La tierra está seca.
C2. Premisas: *1*) No es cierto que llueve o graniza. *2*) Si no es cierto que llueve o graniza, entonces hay sol. Conclusión: Hay sol.
C3. Premisas: *1*) Me mojo si llueve. *2*) Si no llueve me deshidrato. *3*) Sufro si me mojo y sufro si me deshidrato. Conclusión: Sufro.
C4. Premisas: *1*) Hay nada o hay Dios. *2*) Es F que no haya nada. Conclusión: Hay Dios.

D. ¿Cuál es la conclusión de estas premisas? *1*) Si la gasolina no llega hasta el carburador, no arranca el coche. *2*) El coche no arranca.

E. ¿Quién mató a Lord Bluebottom? ¿Su cuñado (*C*)? ¿Su sobrina (*S*)?¿El joven capitán (*J*) Usted tiene que sacar la conclusión y demostrarla mediante una prueba formal. Aquí están las "pistas" (considérense como las premisas de la prueba):

1. O el té contenía cianuro o Lord Bluebottom fue asesinado por su cuñado.
2. Si Lord Bluebottom fue asesinado por su cuñado, entonces su sobrina no lo asesinó.
3. El té no contenía cianuro si el joven capitán no es el asesino.
4. Si la sobrina no lo asesinó, entonces no fue matado por su cuñado o el joven capitán es el asesino.

F. Diseñe un circuito eléctrico para expresar la implicación $p > q$. Como $[p > q] <> [\sim p \vee q]$, es más fácil basar el circuito en $\sim p \vee q$; use los patrones para la disyunción y negación de arriba (1.1.7).

1.11 Sistema de la tabulación

Ludwig Wittgenstein y E. L. Post elaboraron un método mecánico para determinar si una proposición (molecular) es una tautología, o sea, una verdad de la lógica proposicional. Se tabulan todas las combinaciones posibles del valor veritativo de una proposición y, si cada combinación da el resultado "V" ("1*" abajo), la proposición es una tautología.

Veamos un ejemplo del principio de la repetición condicionada (1.3.2), donde la única relación es la implicación (recuerde que su función veritativa es 1011):

p	q	p	$>$	$[q$	$>$	$p]$
1	1	1		1		1
					1	
			1*			
1	0	1		0		1
					0	
			1*			
0	1	0		1		0
					1	
			1*			
0	0	0		0		0
					1	
			1*			

En el caso de la negación, se trueca el valor veritativo (1 por 0 o 0 por 1); p. ej., el primer renglón sería en el caso de $p > [\sim q > p]$:

p	q	p	$>$	$[\sim q$	$>$	$p]$
1	1	1		0		1
					1	
			1*			

El método tabular da el mismo resultado que el uso de las reglas, pero no refleja la secuencia acostumbrada de pasos en el argumentar. El método tabular tampoco vale en la lógica predicativa general.

* UNIDAD DE EJERCICIOS 7: TABULACIÓN

Prueba mediante el sistema de tabulación que las siguientes proposiciones son tautologías:

1. $p > [p \& p]$
2. $[p \& q] <> [q \& p]$
3. $p > [\sim q > p]$
4. $p \vee \sim p$
5. $[\sim p > p] > p$

1.12 Cuadro de oposición proposicional

He aquí el cuadro escolástico proposicional (1.1.5):

p & q	|	~p & ~q (~[p v q])
>	</>	>
p v q	v	~p v ~q (~[p & q])

* UNIDAD DE EJERCICIOS 8: CUADRO PROPOSICIONAL

Establece las relaciones del cuadro proposicional mediante pruebas categóricas:

1. [p & q] | [~p & ~q]; use la forma equivalente ~[[p & q] & [~p & ~q]]
2. [p & q] > [p v q]
3. [p & q] </> [~p v ~q]; use la forma equivalente ~[[p & q] <> [~p v ~q]]
4. [p v q] v [~p v ~q]
5. ~[p v q] . ~[p & q]

Capítulo 2

EL CÁLCULO PREDICATIVO

Aristóteles en la silogística y los escolásticos, p. ej., bajo la rúbrica de las "propiedades de los términos" (*proprietates terminorum*) analizaron la proposición como sujeto y predicado (y "cópula", el verbo "ser/estar"). G. Frege, en su "conceptología" (*Begriffsschrift*) fue el primero en elaborar la teoría actual de la cuantificación, sustituyendo el análisis sujeto-predicado por el de función-argumento; la función (término matemático) corresponde a las propiedades o relaciones y el argumento a las cosas.[36]

2.1 Formalización

2.1.1 La proposición atómica

En la lógica proposicional no "desarmábamos" la proposición atómica para examinar su estructura interior (introducción). Pues las conectivas (~, &, >, v, <>) bastaban para elaborar la lógica de las proposiciones sin tomar en cuenta cómo su contenido interior afectaba las relaciones entre ellas. Ahora, en la lógica predicativa o cuantificacional escudriñaremos la composición interior de las proposiciones atómicas, y discutiremos las relaciones interproposicionales a la luz de ella. La estructura interior también consta de relaciones; podemos hablar, pues, de las relaciones intraproposicionales (dentro de la proposición atómica) e interproposicionales (entre las proposiciones).

2.1.2 Tipos de proposición atómica

Se han identificado dos tipos fundamentales de proposición atómica, es decir, de relaciones intraproposicionales, a las que podemos llamar: predicación e identidad.

[36] Suele exagerarse la "inflexibilidad" del esquema sujeto-predicado; los estudios recientes han mostrado su versatilidad en manos de los lógicos escolásticos.

2.1.2.1 Predicación

En ésta, una propiedad (rasgo, característica, cualidad, atributo...) se atribuye a una o a varias cosas. Las propiedades pertenecen a las cosas, y un término que se refiere a una propiedad puede llamarse en este sentido un *predicado*. Es por eso que la parte de la lógica que estudia los predicados se llama "lógica predicativa". P. ej., el oso tiene la propiedad de ser *peludo* y en la oración "el oso es peludo", "peludo" es un predicado. Distinguiremos dos tipos de proposiciones predicativas:

1. *sencilla*: cuando hay una sola cosa a la que se atribuye la propiedad. P. ej.: "Don Quijote es manchego" (el ser *manchego* se atribuye a don Quijote), "el rey corre" (el *correr* se atribuye al rey), "Rocinante es una ficción de la imaginación" (el ser *ficción* se atribuye a Rocinante).

2. *compleja* (relaciones): cuando hay dos o más cosas a las que se atribuye una propiedad. P. ej.: "Don Quijote ama a Dulcinea" (la propiedad de amar se atribuye al par don Quijote - Dulcinea —en este orden—), "Dulcinea es más alta que Sancho Panza" (el ser más alto se atribuye a Dulcinea y a Sancho así ordenados), "Quijote da a Sancho Panza el yelmo de Mambrino" (el dar se atribuye a don Quijote, a Sancho y al yelmo en el orden de dador, receptor y don). El orden de los términos que denotan cosas, pues, puede ser importante. Si Dulcinea no ama a don Quijote, el amar puede atribuirse a Quijote-Dulcinea pero no a Dulcinea-Quijote. Hablamos de pares ordenados de símbolos, o de triples, etc. cuando se trata de tres o más.

En vez de hablar de propiedades, podríamos hablar de clases o conjuntos (usamos los términos de manera intercambiable). P. ej., "el rey corre" podría interpretarse en términos de

- una propiedad: el rey tiene la propiedad de *correr*, al rey le conviene la propiedad de *correr*.
- un conjunto: el rey pertenece a la clase de las cosas *que corren*, el conjunto de las cosas *que corren* tiene al rey como miembro o elemento.

Puede hablarse también de las relaciones como conjuntos. "Quijote ama a Dulcinea" puede interpretarse como:

- una propiedad: el par Quijote-Dulcinea tiene la propiedad de *amar*, les conviene el *amar*.
- un conjunto: el par Quijote-Dulcinea pertenece a, o es miembro de la clase de los pares cuyo primer miembro *ama* al segundo (2.1.7).

En el pasado se pensó que es más claro o "concreto" hablar de conjuntos y clases que de propiedades y rasgos, pero en realidad el nivel de abstracción de los conjuntos y de las propiedades es igual. Además, el alumno que aprende la lógica predicativa aprende al mismo tiempo aspectos básicos de la teoría de los conjuntos.

2.1.2.2 Identidad

Podemos pensar en ésta provisoriamente como la referencia a una cosa mediante dos "nombres" en el sentido amplio. P. ej., en las oraciones "don Quijote es Alonso Quijano" y "la estrella matutina es la

estrella verpertina", "don Quijote" y "Alonso Quijano" nombran la misma persona y "la estrella matutina" y "la vespertina" nombran ambos a Venus. Comentaremos más sobre la interpretación de la identidad más adelante (3.1.1, 3.2, 3.4, 12.2.4).

Pero los "nombres" con que aludimos a las cosas son de dos tipos:

1. *nombres propios*: p. ej., "Venus", "don Quijote", "Alonso Quijano", "Karl Marx", "Dulcinea", "Cervantes", "Dios".
2. *descripciones definidas*: p. ej., "la estrella matutina", "el rey", "mi computadora", "aquel caballo", "este hombre", "el yelmo de Mambrino", "el autor de *Don Quijote*". Note que las dos últimas descripciones incluyen los nombres propios "Mambrino" y la novela "*Don Quijote*". Russell y Whitehead elaboraron una famosa teoría de las descripciones (3.1.3). Los escolásticos llamaban a expresiones como: "este hombre", términos "vagos" (2.1.6, 2.2.7, 3.1.1).

Usamos "cosa" en un sentido amplio para incluir objetos concretos naturales (un árbol) o fabricados (una silla), personas (Napoleón), oraciones, actividades (el correr), obras de literatura o música (una ópera), eventos (el desubrimiento de Urano), procesos (una síntesis proteica), abstracciones (la justicia), proposiciones, números (2.1.6)... Es evidente que el filósofo puede limitar el alcance de lo que llama una "cosa" si así lo desea (2.2.3).

Podemos atribuir propiedades no sólo a las cosas concretas sino también a las abstractas, como en "la justicia es deseable". Las proposiciones pueden tener propiedades en algún sentido; en: "es increíble que don Quijote sea tan crédulo", el ser *increíble* se atribuye a la proposición de *ser don Quijote tan crédulo*, y en: "don Quijote cree que Rocinante es bonito", el *creer* relaciona don Quijote con la proposición de *ser Rocinante bonito*. La posibilidad se ha interpretado como propiedad de una proposición, como en "es posible que don Quijote haya sido andaluz" (hay otras interpretaciones también).

2.1.3 El cuadro predicativo

Algunas proposiciones simples son clasificables en el cuadro de oposición (1.1.5, 1.12) escolástico, según si son universales o particulares y afirmativas o negativas:

	afirmativo	*negativo*
universal	todo hombre es mortal	ningún hombre es mortal
particular	algún hombre es mortal	algún hombre no es mortal

Los escolásticos usaban los siguientes símbolos para representar las formas proposicionales ("*a*" e "*i*" son las vocales de *affirmo* en latín; "*e*" y "*o*" las de *nego* y "*S*" y "*P*" significan sujeto y predicado en el sentido escolástico):

SaP	*SeP*
SiP	*SoP*

Suele analizarse estas proposiciones con la ayuda de las expresiones "todo" y "alguno" y las conectivas proposicionales (2.2.4):

si algo es un hombre, es mortal	*si algo es un hombre, no es mortal*
algo es tanto un hombre como mortal	*algo es un hombre pero no mortal*

Veremos una restricción del uso del cuadro predicativo en 2.2.4.

2.1.4 Los elementos de la oración

El contenido interior de la oración atómica incluye varios elementos. En el lenguaje simbólico se da cuenta de:

- las *cosas*: p. ej., "Cervantes", "el autor del *Quijote*"
- las *propiedades*: p. ej., "manchego"
- el "ser" —predicación e identidad—: p. ej., "es", "está" (cuando estos verbos se usan como cópula)
- la *cantidad* de cosas —cuantificación—: p. ej., "todo" y "alguno"

Se ha percibido cierto isomorfismo o correspondencia entre los símbolos del lenguaje, los elementos de la oración (o el sistema lógico) y los entes de que son símbolos. Tenemos esta *semántica* (en el sentido aproximado de una correspondencia entre lenguaje o pensamiento y la realidad simbolizada):

lo simbolizado	*símbolos del lenguaje*
cosa	término singular
propiedad	predicado

Ya se notó el uso de "argumento" y "función"; a veces se emplean los términos de Russell: a la expresión singular (del lenguaje simbólico) corresponde el elemento particular, el "constituyente" del hecho, y al predicado corresponde el elemento universal, el "componente", una propiedad sencilla o relación (8.2.1). Además, se dice que un nombre se refiere a una cosa, o que la denota, y un predicado (o toda la oración) indica un sentido o significado (una descripción definida también incluye un sentido). Se ha hablado, pues, de la:

1. *referencia* o *denotación*. Este concepto corresponde, p. ej., a (aspectos de) lo que los escolásticos llamaban "*suppositio*" y Frege llamó "*Bedeutung*".
2. *sentido* o *connotación*. Este concepto corresponde, p. ej., a la "*significatio*" de los escolásticos y al "*Sinn*" de Frege.

Evidentemente, esta doctrina corre pareja con la división platónica de la realidad (y de la experiencia de ella) y con la discusión de los universales inspirada por Porfirio en la escolástica:

abstracciones	universales
cosas concretas	particulares

esquema que es interpretable ontológicamente de varias maneras (10.3.2).

2.1.5 Símbolos de la lógica predicativa

La lógica de los predicados presupone todos los símbolos y reglas de la lógica de proposiciones y, además, tiene sus propios símbolos. Éstos incluyen tanto constantes como variables. Las constantes lógicas son los *cuantificadores*. Y hay constantes y variables que hacen las veces de cosas y propiedades. Las constantes y variables de cosas se llaman *individuales* o singulares. Las de propiedades se llaman *predicativas* o simplemente *predicados*. Tenemos pues los siguientes tipos de símbolos:

2.1.5.1 Constantes

A) *Constantes lógicas*; los cuantificadores:

1. universal: Ux
2. existencial: E*x* (2.2.1)

B) *Constantes singulares y predicativas*; hay constantes para:

1. cosas: letras minúsculas usadas como constantes singulares: nombres propios y descripciones (2.1.6).
2. propiedades (y relaciones): letras mayúsculas usadas como predicados (2.1.7).

2.1.5.2 Variables

Hay variables para:

1) *cosas*: *x*, *y* y *z* (2.1.6)
2) *propiedades* (y relaciones): cuando se permiten: *X*, *Y* y *Z* (2.1.7)

La segunda parte de la lógica se llama "predicativa" por los predicados y se llama "teoría de la cuantificación" por los cuantificadores.

2.1.6 Expresiones singulares

Hemos dejado abierta la posibilidad de tomar "cosa" en el sentido tan amplio como el filósofo lo quiera permitir en su ontología (2.1.2). Ejemplos son: Napoleón, el rey actual de España, Felipe II, yo, mi computadora, Asterix, el vellocino de oro, don Quijote, Madrid, Alemania, el fin de la guerra, la invención de la collera, la responsabilidad, Dios.

Usamos letras *minúsculas* como *constantes singulares* o individuales para las cosas, escogiéndolas normalmente para recordarnos de las cosas a que se refieren. Las constantes del lenguaje ordinario son los nombres propios que denotan cosas y las de las matemáticas son los numerales que denotan los números. Usamos letras sencillas para denotar las cosas que pueden ser indicadas en el lenguaje ordi-

nario por nombres o descripciones. Ejemplos: *d* es Dulcinea; *m*, el yelmo de Mambrino; *q*, don Quijote; *r*, el actual rey de España; *d*, Dios; *c*, mi computadora; *j*, la justicia; *i*, Irlanda; *c*, la invención de la collera.[37] Whitehead y Russell simbolizaban las descripciones definidas de una manera más compleja (véase 3.1.3). Al usar una letra como nombre o descripción, presupondremos que la cosa a que se refiere existe en el contexto apropiado; no hay que hacer tal presuposición en la lógica libre (3.5).

Cuando deseamos especificar una cosa en particular sin identificarla, escribiremos las letras minúsculas de la primera parte del alfabeto: *a*, *b*, *c*, etcétera.

En cuanto a las *variables singulares*, cuando queremos indicar *cualquier* cosa (explicaremos lo que significa esto abajo) usamos las letras minúsculas: *x*, *y*, *z*. Es indiferente la letra que escojamos como variable; *Fx*, *Fy* y *Fz* tienen exactamente el mismo sentido y función.

Las descripciones definidas tienen tanto sentido como referencia. P. ej., "el yelmo de Mambrino" contiene, además de una referencia a la "cosa" Mambrino, el predicado "yelmo". Por otro lado, algunos filósofos, como Saúl A. Kripke y J. S. Mill, han preferido decir que los nombres propios tienen referencia pero carecen de sentido; serían, pues, como etiquetas. Kripke los llama "designadores rígidos" desde la perspectiva de la lógica modal (10.3.2). Esta interpretación también se halla en la escolástica.

Otros, como Frege, Russell y Wittgenstein, han sostenido que los nombres incluyen un sentido de algún modo. Frege creyó que, por lo menos en los lenguajes imperfectos, el mismo nombre puede tener distintos significados para diferentes hombres ("Karl Marx" o "Ronald Reagan" tienen connotaciones muy diversas para distintas personas). La tesis del esencialismo supone que un individuo tiene ciertos rasgos necesariamente (9.2.2, 13.4.2). Sin embargo, el hecho de que un nombre sugiera varios sentidos o rasgos (según esta opinión, serían como descripciones del individuo) no implica que el nombre como tal tenga sentido.

Russell también opinó que los nombres ordinarios se conectan con las descripciones y propuso una manera de expresar éstas (3.1.3). Además, identificó ciertas expresiones como "nombres lógicamente propios": *esto*, *eso*, *aquello*. Los escolásticos también reconocieron un papel lógico especial para tales expresiones. Hemos visto (2.1.2) que usaban adjetivos demostrativos, *este*, *ese*, *aquel*, etc., para componer "nombres vagos" como "este hombre". También usaban los pronombres neutros, p. ej. "*hoc*" (esto), que Russell llamó nombres lógicamente propios, para formular un procedimiento para decidir cuándo una expresión "tiene referencia (*supponit*)" (incorporamos el término en la traducción):

> ...un término tiene referencia si pueden formarse proposiciones afirmativas V en las cuales el predicado es el término de cuya referencia se cerciora y el sujeto es un nombre lógicamente propio de la cosa que el término significa.

Por ejemplo, "unicornios" en "los unicornios tiene un solo cuerno" no tiene referencia (real), porque es F la proposición "esto es un unicornio".

Wittgenstein opinó[38] que los nombres se asocian "sueltamente" con las descripciones correspondientes y otros discuten si los nombres son denotativos o descriptivos. En el sistema que se presenta aquí se permiten tanto los nombres propios, los cuales, se puede pensar, tienen referencia pero carecen de sentido, como las descripciones definidas, las cuales tienen referencia y sentido (3.1.3).

---

[37] Cuando una propiedad se atribuye a una propiedad, podría permitirse el uso de la letra mayúscula como término singular; p. ej., "la propiedad de ser humano (la clase de los hombres) no es humana (no es hombre): "~HH"; también podría escribirse:"~Hh" (o podría indicarse el "tipo" 2.3.9).

[38] *Investigaciones filosóficas*.

2.1.7 Expresiones predicativas

En español se indican las propiedades de varias maneras; p. ej., mediante adjetivos ("manchego"), sustantivos ("ser humano") y verbos ("correr"). Para indicar propiedades específicas, usaremos como *constantes predicativas* letras *mayúsculas*, generalmente las que indican el sentido. Ejemplos: "*H*" : *ser humano*, "*J*": *justo*, "*C*": *crédulo*, "*S*": (*ser*) *silla*, "*C*": (*ser*) *caballo*, "*C*": *correr*, "*A*": *amar*, "*A*": *ser más alto que*, "*D*": *dar*.

Cuando el predicado se aplica a una sola cosa, se llama *monádico*; p. ej., *C* para "correr", pues una sola cosa corre. Cuando el predicado se aplica a más de una cosa, se llama *poliádico* o *relacional*; p. ej., *D* es triádico, pues la relación de dar pide tres cosas: el dador, el receptor y la cosa dada.

Cuando queremos especificar una propiedad en particular sin identificarla, usaremos las letras mayúsculas *F*, *G*, *H*. Tal uso corresponde al empleo de *a*, *b*, *c*; *Fa* se lee "*a* es *F*", donde *a* es una cosa particular y *F* una propiedad particular; también puede leerse como "*a* tiene la propiedad *F*" o "*a* es miembro del conjunto *F* ".

Si queremos indicar *cualquier* propiedad (explicaremos lo que significa esto abajo 2.2.5), usamos las letras mayúsculas: *X*, *Y*, *Z* como *variables predicativas*.

Como se notó en 2.1.2, puede hablarse en términos de propiedades o conjuntos. Podemos considerar los predicados, pues, como correspondiendo a las propiedades o a los conjuntos. En efecto, la lógica predicativa se relaciona con la teoría de los conjuntos.

2.1.8 Proposiciones

Las distintas clases de proposiciones (de predicación y de identidad) tendrán estructuras distintas.

1. *Predicación*. Indicamos la predicación, tanto sencilla como compleja (relación), mediante simple yuxtaposición, colocando el predicado a la izquierda y el terminal individual a la derecha. Se ilustran así los dos casos de la predicación:

   a) *sencilla*: ejemplos: *Mq*: "don Quijote es manchego", *Cr:* "el rey corre", *Fr*: "Rocinante es ficción de la imaginación", o también "don Quijote tiene la propiedad *manchego*", "*manchego* conviene a don Quijote".

   b) *compleja* (relación): el orden de los símbolos singulares es importante, pues se trata de pares (triples...) ordenados (2.1.2). En *Adr*, "Dulcinea ama a Rocinante", *Ard*: "Rocinante ama a Dulcinea" y *Bsq*: "Sancho Panza es más bajo que don Quijote", *dr*, *rd* y *sq* son pares ordenados. En ocasiones el orden a seguir en las relaciones no es claro siempre, y es importante precisar lo que se quiere decir. P. ej., "don Quijote da el yelmo de Mambrino a Sancho Panza" puede representarse como *Dqsm*. En este caso, el primer lugar marca el dador (*q*), el segundo lugar marca el receptor (*s*) y el tercero marca el don (*m*). El orden es arbitrario, no hay por qué no pudiera expresarse la misma proposición como *Dqms*, *Dsqm*, etcétera.

   A veces, sobre todo en la teoría de los conjuntos, se usa el símbolo $\in$ (épsilon); (ἐστί(ν), "esti(n)", significa "es" en griego), para indicar la predicación: la pertenencia a un conjunto o la posesión de un predicado. Los ejemplos de arriba serían: $q \in M$; "don Quijote es manchego";

$r \in C$: "el rey corre"; $r \in F$: "Rocinante es ficción de la imaginación". La expresión "$q \in M$" puede leerse como Mq: "q posee la propiedad M", "M conviene a q" o "q pertenece a la clase M". Menos frecuentemente se emplea el épsilon con pares de símbolos; $dr \in A$ significa lo mismo que Adr. No emplearemos el épsilon.

2. *Identidad.* Usaremos como signo de la identidad: "=" (su negación es "≠"). P. ej., $q = a$: "don Quijote es Alonso Quijano" y $\sim(c = h)$ o $c \neq h$: "Cervantes no es el autor de *Hamlet* (h)".

2.1.9 Ejemplos

Aquí están varios ejemplos de traducción. El alumno debe tratar de formalizarse las oraciones antes de ver las traducciones ofrecidas. Para "dar" suponemos que el triple ordenado tiene el orden dador-receptor-don.

1. Dulcinea corre.	*Cd*
2. El peso es un peso.	*Pp*
3. Don Quijote es manchego.	*Mq*
4. Don Quijote está triste.	*Tq*
5. Don Quijote ama a Dulcinea.	*Aqd*
6. Dulcinea y don Quijote se aman uno a otro.	*Adq & Aqd*
7. Dulcinea y don Quijote se aman a sí mismos.	*Add & Aqq*
8. Don Quijote es un ser humano.	*Hq*
9. Don Quijote es humano.	*Hq*
10. Don Quijote es un hombre.	*Hq*
11. Don Quijote no es gallego.	*~Gq*
12. La silla no es elefante.	*~Es*
13. Dulcinea da la silla a don Quijote.	*Ddqs*
14. Don Quijote da la silla a Dulcinea.	*Dqds*
15. Don Quijote da Rocinante a Dulcinea.	*Dqdr*
16. Dulcinea da Rocinnte a don Quijote.	*Ddqr*
17. Dulcinea se da la silla a sí misma.	*Ddds*
18. Don Quijote se da a Dulcinea.	*Dqqd*
19. Dulcinea se da sí misma a sí misma.	*Dddd*
20. Dulcinea es justa y bella.	*Jd & Bd*
21. Don Quijote corre y ama a Dulcinea.	*Cq & Aqd*
22. Dulcinea es una doncella guapa.	*Dd & Gd*
23. Dulcinea y don Quijote son hombres.	*Hd & Hq*
24. Dulcinea no ama a don Quijote.	*~Adq*
25. Don Quijote está triste pero no lo está Dulcinea.	*Td & ~Td*
26. La justicia no es un vicio.	*~Vj*
27. La silla no es azul.	*~As*
28. Dios es omnisciente.	*Od*
29. Dulcinea no es amada por don Quijote.	*~Aqd*
30. El rey no es estúpido sino injusto.	*~Er & Ir*

* UNIDAD DE EJERCICIOS 9: TRADUCCIÓN

A. Traduzca al español (los símbolos son los de las oraciones 2.1.9 de arriba):

A1. $\sim Md$
A2. Acc
A3. $Dqpd$
A4. Aqd & $\sim Adq$
A5. $Aqd > Aqq$
A6. Aqd v Adq
A7. Hq & $\sim Gq$
A8. $Aqd <> Adq$
A9. $Dqqq$
A10. $\sim Jq$ & $\sim Gq$
A11. $[Adq$ & $\sim Aqd] > \sim Td$
A12. $Td > [Adq$ v $\sim Aqd]$
A13. $Dqqd > [Eq$ & $Gd]$
A14. $\sim Eq <> Adq$
A15. $\sim Ddqd$

B. Capte el sentido y entonces formalize (escoja sus propios símbolos):

B1. Sancho Panza es bueno.
B2. Sancho conduce Rocinante a don Quijote.
B3. Rocinante muerde a Sancho Panza.
B4. Sancho Panza era bueno.
B5. Dulcinea no se da a Sancho.
B6. Dulcinea se casó con Sancho.
B7. Sancho no da Dulcinea a sí mismo.
B8. Sancho se casa con ella, si Dulcinea es maja y en sus cabales.
B9. Dulcinea no se casará con don Quijote si no tiene trabajo.
B10. Dulcinea tiene trabajo, pero está triste y deprimida.
B11. Rocinante ama a Sancho ssi Sancho lo ama a él.
B12. Rocinante correrá.
B13. Rocinante corrió y Dulcinea le dio el premio.
B14. Rocinante está corriendo y brincando.
B15. Se murió el caballo que corrió en Irlanda.
B16. La silla que es azul y está en el rincón pertenece a Sancho.
B17. Pertenece a Sancho la silla que es azul y está en el rincón.
B18. El yelmo es de Dulcinea.
B19. Hamlet será o no será.
B20. Rocinante tomó la brida y corrió con ella.

2.2 Cuantificación

2.2.1 Cuantificadores

Las *constantes lógicas* de la lógica predicativa son los *cuantificadores* (o "cuantores"). Hay dos cuantificadores:

1. *universal* ("todo"): Ux (Uy, Uz). Ux se lee: "para cualquier cosa, llámese x,...", "para cualquier equis,..." Indica que todas las equis que gobierna pueden reemplazarse (todas juntas) por la letra de *cualquier* cosa.

2. *existencial* ("al menos uno", "alguno", "uno"): E*x* (E*y*, E*z*). E*x* se lee: "para al menos una cosa, llámese *x*, ...", "para al menos una equis, ...", "hay al menos una equis tal que..." Indica que una o todas las letras que gobierna pueden ser reemplazadas por la letra de *al menos una* cosa.

El cuantificador universal es más "fuerte" que el existencial, pero este último es compatible con "todo", pues E*x* significa: "hay al menos una cosa, tal vez todas". "E*xFx*" puede leerse así: "hay al menos una cosa (quizás todas), llámese *x*, tal que *Fx*".

Otros sistemas de lógica emplean símbolos distintos. En vez de U*x* se usa (*x*), $\forall x$, $\wedge x$, etc., y en vez de E*x* se usa ($\exists x$), $\exists x$, $\bigvee x$, etc. La notación polaca (1.1.6) usa estos cuantificadores:

$\prod x$ (para U*x*)
$\sum x$ (para E*x*)

2.2.2 Proposiciones cuantificadas

Se puede explicar el uso de los cuantificadores de la siguiente manera. Tomemos *Mq* ("don Quijote es oriundo de La Mancha") como ejemplo. Si ponemos una *y* en vez de la *q* para obtener *My* (pudiéramos haber usado *x* o *z*: *Mx* o *Mz*), podemos ver la *y* como un hoyo o una ranura en la expresión. Una expresión como *My* se llama una fórmula (u oración) "abierta". Es una fórmula bien formada y puede aparecer como paso en una prueba formal. Sin embargo, es incompleta; no corresponde a una oración completa en español ni expresa una proposición. Al agregarse un cuantificador que ligue la y, *My* llega a ser una fórmula completa y expresa una proposición.

Agreguemos los cuantificadores, pues:

1. *Universal*: U*yMy* (U*xMx*, U*zMz*). El cuantificador universal U*y* indica que podemos reemplazar la *y* de *My* con la letra de *cualquier* cosa. Por lo tanto significa "cualquier cosa es manchega", "todo es manchego".

   Al reemplazar *y* por *m* (el yelmo de Mambrino), obtenemos *Mm*, "el yelmo de Mambrino es de La Mancha". Si afirmamos U*yMy* ("todo es manchego"), podemos afirmar también *Mm* ("el yelmo de Mambrino es manchego"). En efecto, podemos justificar este tipo de inferencia con una regla (la cual introduciremos formalmente abajo, 2.3.2), *la elimininación del cuantificador universal* (**ecu**):

1	U*xMx*	**h**
2	*Mm*	1 **ecu** *m/x*

   Note que la línea diagonal "/" significa: "(se coloca) en vez de"; "*m/x*" indica que cuando se deduce *Mm* de U*xMx*, se cambia la equis de U*xMx* a eme: *Mm*.

2. *Existencial*: E*zMz* (E*xMx*, E*yMy*). El cuantificador existencial E*z* indica que podemos reemplazar la *z* de *Mz* con la letra de *al menos una cosa* (tal vez todas). Por lo tanto significa "al menos una cosa (tal vez todas) es manchega", "algo es manchego".

   De *Mm* ("el yelmo de Mambrino es manchego") se sigue E*xMx* ("algo es manchego"). En efecto, podemos justificar esta inferencia con una regla (la cual introduciremos formalmente abajo, 2.3.4): *la introducción del cuantificador existencial* (**ice**):

1	*Mm*	**h**
2	*EyMy*	1 **ice** *y/m*

   Note que *y/m* significa que escribimos *y* en vez de *m* cuando deducimos E*yMy* de *Mm*. No podemos escribir E*mMm*, porque no podemos usar *m* como variable; hay que escoger *x*, *y* o *z*.

Observe que tenemos que usar corchetes "[ ]" cuando queremos que el cuantificador gobierne toda la proposición molecular. El manejo del cuantificador en este sentido es igual al del signo de la negación "~" (1.7.1) y a los operadores modales. Ejemplos:

En U*xFx* v *Gx*, la fuerza del cuantificador U*x* se extiende sólo a la *x* de *Fx*, no a la de *Gx*. El cuantificador "gobierna" o "rige" *Fx* pero no *Gx*; *Fx* está, pero *Gx* no está, en el "dominio" o "alcance" del cuantificador. Decimos que el cuantificador "liga" la *x* de *Fx* y que la *x* de *Fx* es *ligada* por el cuantificador. En cambio, cuando la *x* de *Gx* no está regida por ningún cuantificador, decimos que es *libre*. Note que si agrego U*x* a *Fy*, para sacar U*xFy*, la *y* sigue siendo libre, porque, por ser las letras distintas, la *x* no liga la *y*.

En "U*x*[*Fx* v *Gx*]", la fuerza del cuantificador U*x* se extiende a las dos *x*, tanto a la de *Fx* como a la de *Gx*. Las dos *x* son ligadas por el cuantificador y, por lo tanto en la expresión no hay ninguna *x* libre.

Finalmente, destaquemos la distinción entre dos tipos de fórmulas:

1. una fórmula *abierta* contiene al menos una variable libre; p. ej., *Cx*: "*x* corre"
2. una fórmula *cerrada* o no contiene variables, como *Cr*: "Rocinante corre" (sólo contiene constantes) o, si contiene variables, éstas están ligadas por los cuantificadores, como en E*xCx*: "algo corre".

2.2.3 El universo del discurso

Podemos escoger las cosas (y las propiedades, 2.2.5) de que queremos hablar dentro de algún contexto. El conjunto de cosas (y propiedades) que constituye el objeto que queremos discutir suele llamarse el *universo del discurso* o el "dominio" de los cuantificadores. P. ej., podemos limitar el universo a los números; en este caso las propiedades también se limitarán (un número puede ser primo pero no azul).

O podemos restringir el universo a las cuatro cosas imaginarias: don Quijote, Dulcinea, Rocinante y el yelmo de Mambrino, y a las cuatro propiedades *humano*, *caballo*, *yelmo* y *majo*. Evidentemente, el universo del discurso también puede ser el mundo real.

2.2.4 Cuadro de oposición y compromiso existencial

Aquí está el cuadro escolástico de oposición con la notación escolástica y la usual representación en nuestros símbolos (2.1.3):

	afirmativo	*negativo*
universal	*SaP* Ux[$Sx > Px$]	*SeP* Ux[$Sx > \sim Px$]
particular	*SiP* Ex[Sx & Px]	*SoP* Ex[Sx & $\sim Px$]

Aristóteles —y los escolásticos generalmente— presuponían que toda oración universal (como *SaP* y *SeP*) conllevaba la existencia de al menos una cosa que tuviera la propiedad *S*. Tal suposición se llama el *compromiso existencial* ("*existential import*", en inglés). Ejemplos son "todo hombre es mortal" (*HaM*) y "ningún hombre es una isla" (*HeI*); tanto HaM como *HeI* implican que hay al menos un ser humano. En cambio, las correspondientes oraciones de la lógica simbólica, Ux[$Hx > Mx$] y Ux[$Hx > \sim Ix$], no tienen el compromiso existencial, e. d., no presuponen que haya cosas que tenga la propiedad *H* (2.4.3).

La diferencia es importante, pues "todo unicornio es cuadrúpedo" sería V en la transcripión Ux[$Ux > Cx$] (pues sólo dice que SI hay un unicornio, entonces tiene cuatro piernas) y sería F en la interpretación UaC (si implica que existe un unicornio realmente).[39] Por eso, para crear una paridad entre las dos interpretaciones de la oración universal, debemos expresar el compromiso existencial explícitamente:

SaP Ux[$Sx > Px$] & E$x$$Sx$	*SeP* Ux[$Sx > \sim Px$] & E$x$$Sx$

El compromiso existencial también afecta al predicado *P* por **mp**, y E$x$$Px$ y E$x$$\sim Px$ se siguen de las conjunciones respectivas.

No hay que confundirse; lo que no tiene el compromiso existencial en la lógica simbólica son *ciertas* proposiciones, como las universales de forma *condicional*. Tales proposiciones no acarrean la existencia por el "si" (si hay un unicornio, tiene cuatro piernas). Pero la regla **ecu** implica el compromiso existencial en el sentido de que las variables son reemplazables por las constantes que denotan cualesquier cosas del universo del discurso sin afirmarse que éstas existan; p. ej. (*q*: don Quijote):

[39] Los escolásticos discutían los problemas en torno al compromiso existencial.

1	Ux[Ux > Cx]	**h**
2	Uq > Cq	1 **ecu** q/x

El cuantificador universal (no sólo el "existencial") implica la existencia en casos como:

1	UxMx	**h**
2	Mx	1 **ecu**
3	ExMx	2 **ice**

Es decir, si todo es mortal, existe algo que es mortal. Se han diseñado sistemas de la "lógica libre" que restringen el compromiso existencial de los cuantificadores (14.6.2). Al hablar de esa lógica se volverá a plantear la validez de las dos reglas **ecu** e **ice** (3.5).

2.2.5 Predicados de predicados

Hasta ahora hemos cuantificado los términos que se refieren a las cosas y hemos usado predicados que indican las propiedades de las cosas. Veremos ahora cómo se puede cuantificar los predicados y atribuir propiedades a las propiedades. Cuando un sistema lógico permite la cuantificación de los predicados se llama "de orden superior" o "de segundo orden"; en cambio un sistema que no tiene esta opción es "de primer orden".

El cuantificador, pues, puede ligar no sólo una letra minúscula que denota una cosa sino también una letra mayúscula que indica una propiedad o relación. Hacemos la convención de usar las letras mayúsculas X, Y, Z como variables de un predicado. Compare estas operaciones de **ice** (Mq: don Quijote es de la Mancha):

1	Mq	**h**
2	ExMx	1 **ice** x/q
3	EXXq	1 **ice** X/M

El segundo paso dice que algo es manchego, o sea, que hay al menos una cosa x tal que x es manchega. Pero el tercero dice que don Quijote es "así o asá", que tiene al menos una propiedad, e. d., que hay al menos una propiedad, llámese X, tal que don Quijote es (tiene) X. Podemos hacer otro tanto en el caso de las relaciones:

1	Aqd	
2	E$XXqd$	1 **ice** X/A

si don Quijote ama a Dulcinea, entonces él guarda al menos una relación con ella.

Y si permitimos la atribución de propiedades a las propiedades mismas, usando así predicados de predicados, podemos formar pruebas del siguiente tipo (*P*: ser propiedad y *M*: ser manchego):

1	$UX[Xq > PX]$	**h**
2	Mq	**h**
	⊢	
3	$Mq > PM$	1 **ecu** M/X
4	PM	2, 3 **mp**

si todo lo que conviene a don Quijote es una propiedad y don Quijote es manchego, entonces el ser manchego es una propiedad. La propiedad de una propiedad es de tipo u orden superior en comparación con aquella de que es propiedad. Frecuentemente se usa una fundición especial de letras para indicar los predicados de los predicados (negrita p. ej.: **PM**).

Fitch y otros lógicos han definido los cuantificadores en términos de predicados de predicados (2.2.8.3).[40] Digamos que la letra *A* indica la propiedad de ser una propiedad universal, e. d., de convenir a todas las cosas. Si queremos hablar en términos de conjuntos (2.1.2), *A* sería la clase de las clases que contienen todas las cosas como miembros. P. ej., la autoidentidad (*I*, en el sentido de $x = x$) es una propiedad universal (AI), pues cada cosa es idéntica consigo misma (2.3.9). Asimismo, *E* indica la propiedad (o la clase) de ser "no-vacía", es decir, de convenir a (o contener) por lo menos una cosa (tal vez todas). La propiedad de ser corso (*C*) no es universal ($\sim AC$), pues no se aplica, p. ej., a Cervantes ($\sim Cc$); por otro lado, es no-vacía (EC), pues se aplica a Napoleón (Cn) y otras cosas. Tenemos pues:

- $UxFx$ corresponde a AF; p. ej. $UxIx =_{df} AI$
- $ExFx$ corresponde a EF; p. ej. $ExMx =_{df} EM$

2.2.6 Ejemplos

Ejemplos de la cuantificación universal (el alumno debe tratar de formalizar las oraciones antes de ver la traducciones sugeridas):

1. Todo es tonto.	$UxTx$
2. Todo es un elefante.	$UxEx$
3. No todo es un elefante.	$\sim UxEx$
4. Cada cosa es un elefante.	$UyEy$
5. Todo corre.	$UzCz$
6. Cualquier cosa, llámese "*y*", corre.	$UyCy$
7. Todo ama a Rocinante o a don Quijote.	$Uz[Azr \vee Azq]$
8. Si algo corre, es bueno.	$Uz[Cz > Bz]$
9. Todo es bueno o no es bueno.	$Ux[Bx \vee \sim Bx]$

[40] Fitch, 128 y ss, 145 y ss; también Frege.

10. Cualquier cosa es boba ssi es tonta.	$Uy[By <> Ty]$
11. Todo ser humano es mortal.	$Uy[Hy > My]$
12. Los hombres son mortales.	$Ux[Hx > Mx]$
13. Todos los seres humanos son mortales.	$Ux[Hx > Mx]$
14. Cualquier hombre es mortal.	$Ux[Hx > Mx]$
15. Cada ser humano es mortal.	$Ux[Hx > Mx]$
16. Ningún hombre es isla.	$Uz[Hz > \sim Iz]$
17. Ninguna isla es hombre.	$Ux[Ix > \sim Hx]$
18. Toda serpiente venenosa es peligrosa.	$Uz[[Sz \& Vz] > Pz]$
19. Todo deportista es fuerte o toma esteroides.	$Uy[Dy > [Fy \vee Ey]]$
20. Dulcinea lo da todo a don Quijote.	$UzDaqz$
21. A don Quijote Dulcinea le da todo.	$UzDaqz$
22. Dulcinea da todo a don Quijote.	$UyDaqy$
23. Dulcinea lo ama todo.	$UxAax$
24. Todo ama a Dulcinea.	$UxAxa$
25. Todo se ama a sí mismo.	$UzAzz$
26. Todo se da a don Quijote.	$UzDzqz$
27. Todo no ama todo.	$Ux\sim UyAxy$
28. No todo ama todo.	$\sim UxUyAxy$
29. Cada caballo odia todo.	$Ux[Cx > UyOxy]$
30. Todo mundo (= ser humano) ama a Dulcinea.	$Uz[Hz > Azd]$
31. Nadie (= ser humano) ama a don Quijote.	$Uy[Hy > \sim Ayq]$
32. Dulcinea ama a todo mundo.	$Ux[Hx > Adx]$
33. Todo el mundo (= ser humano) ama a don Quijote.	$Uz[Hz > Azq]$
34. Don Quijote no ama a nadie.	$Ux[Hx > \sim Aqx]$
35. Todo mundo ama a todo mundo.	$UxUy[[Hx \& Hy] > Axy]$
36. La autoidentidad (*I*) es universal (*A*).	AI
37. La autoidentidad es no-vacía.	EI
38. La autoidentidad es autoidéntica.	II
39. La no-vaciedad (*E*) no es universal.	$\sim AE$
40. La universalidad (A) es no-vacía.	EA

Ejemplos de la cuantificación existencial y universal:

41. Algo es bueno.	$ExBx$
42. Algo es un elefante.	$ExEx$
43. Algo no es un elefante.	$Ex\sim Ex$
44. Hay al menos un elefante.	$ExEx$
45. Existe a lo menos un elefante.	$EzEz$
46. No es cierto que algo sea un elefante.	$\sim EyEy$
47. Corre algo.	$EzCz$
48. Algo, llámese "*z*", corre.	$EzCz$
49. Algo ridículo corre.	$Ex[Rx \& Cx]$
50. Corre alguna cosa ridícula.	$Ez[Rz \& Cz]$
51. Algún hombre es una isla.	$Ey[Hy \& Iy]$

52. Alguna isla es un hombre.	E*z*[*Iz* & *Hz*]
53. Algo que corre es un elefante.	E*x*[*Cx* & *Ex*]
54. Algo es bobo o no es bobo.	E*x*[*Bx* v ~*Bx*]
55. Algo es tonto ssi es bobo.	E*y*[*Ty* <>*By*]
56. Algún hombre es mortal.	E*y*[*Hy* & *My*]
57. Un ser humano es mortal.	E*y*[*Hy* & *My*]
58. Existe algo que es tanto humano como mortal.	E*z*[*Hz* & *Mz*]
59. Es mortal al menos un ser humano.	E*y*[*Hy* & *My*]
60. Alguna serpiente venenosa es peligrosa.	E*z*[[*Sz* & *Vz*] & *Pz*]
61. Algún deportista es fuerte o toma esteroides.	E*y*[*Dy* & [*Fy* v *Ey*]]
62. Dulcinea da algo a don Quijote.	E*zDdqz*
63. Dulcinea da alguna cosa a don Quijote.	E*yDdqy*
64. Dulcinea da algo a sí misma.	E*yDddy*
65. Dulcinea ama algo.	E*xAdx*
66. Algo ama a Dulcinea.	E*xAxd*
67. Algo se ama a sí mismo.	E*zAzz*
68. Alguna cosa se da Rocinante a sí mismo.	E*zDzzr*
69. Algo ama algo.	E*x*E*yAxy*
70. Algo ama todo.	E*x*U*yAxy*
71. Todo ama algo.	U*x*E*yAxy*
72. No todo ama algo.	~U*x*E*yAxy*
73. Algún caballo odia todo.	E*x*[*Cx* & U*yOxy*]
74. Un elefante odia algo.	E*y*[*Ey* & E*xAyx*]
75. Dulcinea da todo a algo.	E*x*U*yDdxy*
76. Dulcinea da algo a todo.	U*x*E*yDdxy*
77. Algo da todo a Dulcinea.	E*x*U*zDxdz*
78. Algo da algo a Dulcinea.	E*z*E*yDzdy*
79. Algo causa todo.	E*x*U*yCxy*
80. Todo es causado por algo.	U*y*E*xCxy*
81. Rocinante es amado por algo.	E*yAyr*
82. Rocinante es amado por todo.	U*yAyr*
83. Nada es bueno.	~E*xBx*
84. Alguien (= ser humano) ama a Dulcinea.	E*x*[*Hx* & *Axd*]
85. Alguien ama a todo.	E*x*[*Hx* & U*yAxy*]
86. Alguien ama a alguien.	E*x*E*y*[*Hx* & *Hy* & *Axy*]
87. Nadie ama todo.	U*x*[*Hx* > ~U*yAxy*]
88. Algún elefante ama a alguien.	E*x*E*y*[*Ex* & *Hy* & *Axy*]
89. Algo da algo a todo.	E*x*U*y*E*zDxyz*
90. Algo da todo a todo mundo.	U*y*[*Hy* > E*xUzDxyz*]
91. El yelmo de Mambrino es un yelmo.	*Yy*
92. A todo muchacho le gusta una chica.	U*z*[*Mz* > E*x*[*Cx* & *Gxz*]]
93. A todo muchacho le gustan las chicas.	U*y*[*My* > U*z*[*Cz* > *Gzy*]]
94. Una chica le gusta a algún muchacho.	E*x*[*Cx* & E*y*[*My* & *Gxy*]]
95. Hay un muchacho a quien le gustan todas las chicas.	U*z*[*Cz* > E*y*[*My* & *Gzy*]]

96. Dulcinea es algo (tiene alguna propiedad).	E*XXd*
97. El yelmo de Mambrino no es todo (no tiene toda propiedad).	~U*YYm*
98. Todo lo que es don Quijote lo es el hombre de la Mancha.	U*X*[*Xq* > *Xh*]
99. Hay algo que don Quijote y Dulcinea son.	E*Z*[*Zq* & *Zd*]
100. Si Dulcinea es maja, entonces es algo.	*Md* > E*XXd*

* UNIDAD DE EJERCICIOS 10: TRADUCCIÓN

Cuantificación universal

A. Traduzca al español (*G*: guapo, *A*: amar, *T*: triste, *C*: correr, *H*: ser humano):

A1. U*xGx*	A6. ~U*xGx*	A11. U*z*[*Cz* & *Tz*]
A2. U*yGy*	A7. U*x*~*Gx*	A12. U*y*[*Cy* & ~*Hy*]
A3. U*zGz*	A8. ~U*xAqx*	A13. U*x*[~*Hx* v *Cx*]
A4. U*yAqy*	A9. ~U*yAyq*	A14. U*x*[*Tx* > *Hx*]
A5. U*zAzq*	A10. U*z*~*Axx*	A15. U*z*[*Hz* > ~*Cz*]

A16. U*xTx* v U*yGy*	A21. U*x*[[*Hx* & *Gx*] > *Axr*]
A17. U*yTy* v U*xGx*	A22. U*xAdx* > [~*Td* & *Hd*]
A18. U*xAqx* > Tq	A23. U*z*[[*Hz* & *Cz*] > [*Tz* & *Gz*]]
A19. ~A*qr* > ~U*xAqx*	A24. U*z*[[*Hz* & *Cz*] > [*Tz* v *Gz*]]
A20. U*x*[U*yAxy* > *Gx*]	A25. U*x*[[*Cx* & *Tx*] > U*yAyx*]

B. Capte el sentido y entonces formalice (escogiendo sus propios símbolos):

B1. Todo es maravilloso.
B2. Todo canta.
B3. Todo es una silla.
B4. Cada cosa es maravillosa.
B5. Todo caballo no es silla.
B6. Ningún caballo es silla.
B7. Todo hombre es racional.
B8. Cada ser humano es racional.
B9. Los seres humanos son racionales.
B10. Todos los seres humanos son racionales.
B11. Cada cosa humana es racional.
B12. Si algo es humano, entonces es racional.
B13. Si una cosa es humana, es racional.
B14. Don Quijote da todo a Rocinante.
B15. Todo mundo (= ser humano) odia todo.
B16. A nadie (= ser humano) le importa.
B17. Sancho no ama a nadie y nadie ama a Sancho.
B18. Todo lo que vale la pena y es difícil es exigente.
B19. Todo lo valioso es exigente y vale la pena.

B20. Nadie ama a nadie.

Cuantificación existencial

C. Traduzca al español (usando los símbolos de *A* y *D*: dar, *R*: rosa):

C1. E*xGx*	C6. ~E*xGx*	C11. E*z*[*Hz* & *Gz*]
C2. E*yGy*	C7. E*x*~*Gx*	C12. E*y*[*Hy* & ~*Gy*]
C3. E*zGz*	C8. ~E*xAqx*	C13. E*x*[*Gx* v ~*Gx*]
C4. E*yAqy*	C9. ~E*yAyq*	C14. E*x*[*Cx* & *Hx* & *Tx*]
C5. E*zAzq*	C10. E*z*~*Axx*	C15. E*z*[*Cz* & ~*Gz* & ~*Adz*]

C16. E*xTx* v E*yGy*	C21. E*x*[*Hx* & ~*Gx* & *Axd*]
C17. E*yTy* v E*xGx*	C22. E*xAdx* & [~*Td* & *Gd*]
C18. E*xAqx* > ~*Tq*	C23. U*x*[*Hx* > [E*yAxy* & E*z*[*Rz* & *Dxyz*]]
C19. *Tq* > ~E*xAqx*	C24. U*z*[[*Hz* & ~*Tz*] > E*y*[*Hy* & *Azy*]]
C20. U*x*[E*yAxy* > ~*Tx*]	C25. E*x*[*Hx* & E*y*[*Hy* > *Axy*]]

D. Capte el sentido; entonces, formalice (escoja sus propios símbolos):

D1. Dulcinea ama algo.
D2. Dulcinea ama a alguien (= ser humano).
D3. Dulcinea amará a cualquiera (= ser humano).
D4. Algunos hombres son sabios y algunos no lo son.
D5. Nada es ridículo.
D6. Algún político es honesto.
D7. Alquien odia a don Quijote.
D8. Algunos hombres no son justos.
D9. Alguien da algo a todo mundo.
D10. Algo ama a todo mundo.

2.2.7 Sistemas sortales

Hay sistemas extensionales o "sortales", en los que las variables se extienden sobre cosas "separadas en varios grupos" (*many-sorted*). P. ej., "todo hombre es animal" podría representarse de la siguiente manera: si *h* es una variable reemplazable sólo por nombres de hombres individuales y *a* es una variable reemplazable sólo por nombres de animales individuales:

$$UhEa(h = a)$$

"para todo hombre *h*, hay al menos un animal *a*, de tal suerte que *h* es idéntico a *a*". La relación en esta fórmula es la identidad (=).

Los sistemas sortales son importantes históricamente en la lógica escolástica, sobre todo a partir de Guillermo de Ockham y otros lógicos del siglo XIV. En el Siglo de Oro muchos preferían trabajar con un sistema en el que hay cuantificación sobre cosas agrupadas y la proposición atómica básica es una identidad.[41] Podemos indicar la operación de sus cuantificadores (o "signos" como decían) fácilmente con la ayuda de paréntesis "( )" y corchetes "[ ]", los cuales encierran la variable sortal misma:

- paréntesis para la cuantificación universal; (h) sería "todo hombre"
- corchetes para la cuantificación particular (usaban "particular" en vez de "existencial"); [a] sería "algún animal" (al menos uno).

Entonces, la expresión de arriba sería:

$$(h)[a]$$

"todo hombre es algún animal". Si la línea diagonal "/" expresa la negación y S y P son metasímbolos reemplazables por sujetos y predicados, el cuadro de oposición predicativa es:

$(S)[P]$	|	$(S)/[P]$
>	</>	>
$[S][P]$	v	$[S]/[P]$

Las proposiciones generales se veían como secundarias y definibles en términos de proposiciones singulares constando sólo de nombres propios o términos "vagos" (2.1.2, 3.1.1), como "este hombre", "aquel animal". Podemos representar los términos vagos con índices numéricos h_1 ("este hombre"), a_3 ("aquel animal"). La proposición básica sería, pues, si la mera yuxtaposición implica la identidad:

$$h_1 a_1$$

"este hombre es (idéntico a) este animal".

Entonces interpretaban las proposiciones que contenían términos generales como sartas de proposiciones que no tenían más que términos singulares ligadas por la disyunción y conjunción. Por ejemplo:

$$q[h]$$

"don Quijote es (idéntico a) algún hombre" sería equivalente a:

$$qh_1 \text{ v } qh_2 \text{ v... v } qh_n$$

"don Quijote es (idéntico a) este hombre o es ese hombre o..."

[41] Véase W. Redmond, *La lógica extensional del Siglo de Oro/ Una introducción histórica a la lógica.*

Las proposiciones universales y particulares se analizaban de la siguiente manera. $(S)[P]$ es equivalente a:

$$[S_1P_1 \text{ v } S_1P_2 \text{ v...v } S_1P_n] \text{ \&}$$
$$[S_2P_1 \text{ v } S_2P_2 \text{ v...v } S_2P_n] \text{ \&...\&}$$
$$[S_mP_1 \text{ v } S_mP_2 \text{ v...v } S_mP_n]$$

Por ejemplo $(h)[a]$ se analiza como:

este hombre es este animal o este hombre es ese animal o...
y ese hombre es este animal o ese hombre es ese animal o...
y aquel hombre es este animal o...

El análisis de $[S][P]$ se hace simplemente cambiando la expresión conjuntiva total a una disyunción:

$$[S_1P_1 \text{ v } S_1P_2 \text{ v...v } S_1P_n] \text{ v}$$
$$[S_2P_1 \text{ v } S_2P_2 \text{ v...v } S_2P_n] \text{ v...v}$$
$$[S_mP_1 \text{ v } S_mP_2 \text{ v...v } S_mP_n]$$

Llamaban *descenso* al procedimiento de derivar el análisis de una proposición general y *ascenso* o "inducción" al procedimiento inverso de derivar una proposición general de su análisis. Semejante sistema, a propósito, es aplicable sólo a universos del discurso de numerables (en los que podemos contar los objetos), pero los escolásticos ofrecían soluciones al problema de los universos no manejables.[42] Usando esta interpretación de la oración categórica, los escolásticos llevaban a cabo análisis lógicos interesantes y le aplicaban las nociones modales y temporales (9.2).

* UNIDAD DE EJERCICIOS 11: CUANTIFICACIÓN ESCOLÁSTICA

A. Traduzca al español el análisis (descenso), el último ejemplo dado arriba. $[S][P]$

B. Presente el descenso de $[h][s]$, donde h y s hacen las veces de "hombre" y "sabio (cosa sabia)".

C. Presente el descenso de $[h](s)$ y con base en el descenso explique lo que $[h](s)$ significa; y después diga en qué circunstancias $[h](s)$ sería V.

2.2.8 Interpretaciones de la cuantificación

2.2.8.1 Conjunción y disyunción

Los escolásticos reconocían estos paralelismos:

[42] Por ejemplo, requerían expresiones metalingüísticas, como premisas (la "constancia") o frases adicionales.

- cuantificación universal — conjunción
- cuantificación existencial — disyunción

Si el dominio son los grandes muralistas mexicanos: Rivera, Siqueiros y Orozco (r, s, o), tenemos esta coimplicación, donde S: "ha vivido en el siglo XX":

- $UxSx <> [Sr \& Ss \& So]$
- $ExSx <> [Sr \vee Ss \vee So]$.

"todo ha vivido en el siglo XX" y "algo ha vivido en el siglo XX". La versión escolástica, en la cual hay que expresar m (ser gran muralista mexicano):

- $(m)[v] <> \{r[v] \& s[v] \& o[v]\}$
- $(m)[v] <> \{r[v] \vee s[v] \vee o[v]\}$[43]

Note que las oraciones atómicas de la lógica actual, Sr, Ss y So, son fundamentales, pero las escolásticas son ulteriormente analizables en identidades; $r[v]$, p. ej. sería:

$$r[v] <> \{rv_1 \vee rv_2 \vee ... \vee rv_n\}$$

2.2.8.2 Interpretaciones

Se han ofrecido dos explicaciones del sentido de los cuantificadores, interpretables como compatibles. La teoría usual es la *objetual*, según la cual las variables se extienden sobre (o, por así decirlo, se refieren a) las cosas u objetos. Así:

- $UxGx$: para todo objeto x, x es F
- $ExGx$: para al menos un objeto x, x es F

Si hablamos de los muralistas:

- $UxSx$: para todo objeto x (e. d., r y s y o), x ha vivido en el siglo XX
- $ExSx$: para al menos un objeto x (e. d., r o s u o), x ha vivido en el siglo XX.

Según la teoría *sustitucional*, las variables se extienden a las expresiones que resultan de la sustitución de la variable por una constante. Para que un sistema reciba esta interpretación, tiene que incorporar constantes singulares. Así:

- $UxGx$: es V todo ejemplo de la sustitución de x en Gx
- $ExGx$: es V al menos un ejemplo de la sustitución de x en Gx

Si hablamos de los muralistas:

[43] Usamos claves "{}" aquí en vez de corchetes para evitar la confusión con el cuantificador particular.

• UxSx: Sr es V y Ss es V y So es V
• ExSx: Sr es V o Ss es V o So es V

En estos casos se sigue respectivamente la conjunción Sr & Ss & So y la disyunción Sr v Ss v So.

Quine, abogando por la interpretación objetual, propuso la conocida tesis ontológica de que "el ser es ser valor de una variable".[44] Una teoría, pues, que admite como teorema E$x[Hx$ & $Sx]$ ("al menos un hombre vive en el siglo XX") está "comprometida" con la existencia de hombres y de cosas que viven en el siglo XX. Quine agrega que la tesis no dice lo que hay sino lo que dice la teoría que hay.

También se puede usar los cuantificadores en el cálculo proposicional para ligar las variables proposicionales: p, q, r, s, t. Efectivamente, algunos lógicos dicen que cada fórmula como p v $\sim p$ está cuantificada implícitamente así:

$$Up[p \text{ v } \sim p]$$

"para cualquier proposición p: p o no p". Además, se ha interpretado semejante cuantificación proposicional (implícita o explícita) de manera objetual o sustitucional. Según la objetual, las variables p, q, r, etc., se extienden sobre las proposiciones (Quine prefiere hablar de las oraciones). La sustitucional exige que sea V toda constante proposicional que sea ejemplo de p. P. ej., si U$p[p$ v $\sim p]$ es V, entonces también son V las oraciones (L: "llueve", N: "nieva"): L v $\sim L$, N v $\sim N$, etcétera.

Una objeción contra la interpretación objetual es el caso de las proposiciones en que se niega la existencia de algo. "Don Quijote no existe" parece acarrear "Ex(x no existe)", cuya lectura objetual sería: "existe algo que no existe". Pero el sentido sustitucional no tiene esta desventaja: es V una sustitución de la fórmula, a saber: "Quijote no existe". Por otro lado, la interpretación objetual parece razonable si la existencia se expresa, p. ej., como $\sim$E$x(x = q)$: "no hay ningún ente idéntico con don Quijote". La oración equivale a U$x(x \neq q)$ ("todo ente no es idéntico a don Quijote") e implica (al menos) E$x(x \neq q)$: "hay un ente que no es idéntico con don Quijote".

2.2.8.3 No-vaciedad

Ya se vio (2.2.5) cómo los cuantificadores pueden introducirse mediante los predicados de orden superior de la universalidad A (*aplicarse a todo*) y la no-vaciedad o existencia E (*aplicarse a una cosa al menos, no ser vacío*). Frege siguió esta aproximación, interpretando la cuantificación como un concepto de un concepto, e.d., un concepto de orden superior. P. ej., el concepto de *ser gran muralista mexicano* (M) es de orden inferior y se aplica a tres hombres concretos. Este concepto, por aplicarse a algo, no es vacío, e. d., es *no-vacío* (2.2.5). El concepto de *ser concepto no-vacío* (E), por aplicarse a su vez a los conceptos, es de orden superior. Habría, pues, una equivalencia entre "hay al menos un gran muralista mexicano" y "el concepto de *ser gran muralista mexicano* no es vacío":

$$ExMx <> EM$$

[44] En *From a Logical Point of View*.

2.2.9 Tipos de relaciones

Con ayuda de la cuantificación pueden distinguirse varias clases de relaciones. Una de ellas se llama reflexiva ssi las cosas a que se aplica guardan la relación consigo mismas:

$$UxRxx$$

Un ejemplo es *tan corto como*: si Bernardo es tan corto como Carlos (*Cbc*), "ambos son tan cortos como sí mismos" (*Caa*, *Cbb*). La identidad también es reflexiva: Bernardo —o cualquier cosa— es idéntico consigo mismo (*Ibb* o $b = b$).

En cambio, la relación *ser padre de* (*Pxy*) no es reflexiva; aún más, es irreflexiva en el sentido de que *~Pxx* es V de todos los padres, pues nadie es padre de sí mismo. Sin embargo, "no-reflexivo" no es igual que "irreflexivo", pues una relación puede ser no-reflexiva sin ser irreflexiva. *Amar* (*Axy*) es una relación no-reflexiva, porque Dulcinea puede, pero no tiene que, amarse a sí misma (*~Add* no tiene que ser V de ella). Una relación puede ser al mismo tiempo reflexiva y no-reflexiva pero no-reflexiva e irreflexiva.

Una relación es *simétrica* ssi las cosas se relacionan en ambos sentidos, e. d., si una cosa guarda la relación con otra, ésta la guarda con aquélla:

$$UxUy[Rxy <> Ryx]$$

La relación de *esposo* (*Exy*) es así: si Napoleón es esposo de Josefina, entonces Josefina es esposa de Napoléon, *Enj* <> *Ejn*. Las relaciones reflexivas son simétricas. La relación *tan corto como* también es simétrica, pues si Bernardo es tan corto como Carlos, Carlos es tan corto como Berardo: *Cbc* <> *Ccb*. En cambio, la relación de *ser más corto que* no es simétrica: el que Alicia sea más corta que Bernardo no implica que Bernardo sea más corto que Alicia. La relación *más corto que* no sólo es no-simétrica sino que es asimétrica, pues vale *Cab* > *~Cba*. Por otra parte, *Amar* es una relación no-simétrica pero no asimétrica: pues si don Quijote ama a Dulcinea, Dulcinea no tiene que, pero sí puede, amar a don Quijote.

Una relación es *transitiva* ssi se "transfiere": si una cosa se relaciona con una segunda cosa y ésta con una tercera, entonces la primera se relaciona con la tercera:

$$UxUyUz[[Rxy \ \& \ Ryz] > Rxz]$$

Por ejemplo, *ser menor que* ($x < y$) es una relación transitiva, pues si dos es menor que tres y tres es menor que cinco, entonces dos es menor que cinco: $[(2 < 3) \ \& \ (3 < 5)] > (2 < 5)$. Por otro lado, *ser padre de* no es una relación transitiva, pues que Alberto sea padre de Bernardo (*Pab*) y Bernardo de Carlos (*Pbc*) no implica que Alberto sea padre de Carlos (*Pac*), sino su abuelo.

Estas distinciones serán importantes en la semántica de los mundos posibles (13.5), cuando tratemos la relacion de la asequibilidad (*Axy*). Describamos ahora su aspecto relacional (no es menester el sentido de "asequible" aquí). Todos los mundos son asequibles a sí mismos, y por ello la relación de la asequibilidad es reflexiva. *Axx* vale de mundo-número-uno (m_1) y de todos los mundos: Am_1m_1, Am_2m_2... Pero la asequibilidad también puede ser *no-reflexiva*: los mundos también pueden ser asequibles a otros mun-

dos: Am_1m_2, Am_1m_3... No decimos que la relación sea irreflexiva, porque es ese caso ningún mundo sería asequible a sí mismo (~Axx siempre valdría, y hemos dicho que la asequibilidad siempre es reflexiva). La relación también puede ser transitiva (si Am_1m_2 y Am_2m_3, entonces Am_1m_3) y, además, simétrica (si Am_1m_2, entonces Am_2m_1). Reflexione sobre las siguientes cuatro posibilidades; la asequibilidad puede ser:

- sólo reflexiva:
  Am_1m_1, Am_2m_2...

- reflexiva y no-reflexiva:
  Am_1m_1, Am_2m_2...; Am_1m_2, Am_2m_3...

- reflexiva, no-reflexiva y transitiva:
  Am_1m_1, Am_2m_2...; Am_1m_2, Am_2m_3...; Am_1m_3...

- reflexiva, no-reflexiva, transitiva y simétrica:
  Am_1m_1, Am_2m_2...; Am_1m_2, Am_2m_3...; Am_1m_3...; Am_2m_1, Am_3m_2, Am_3m_1...

2.3 Reglas de la cuantificación

2.3.1 Metalenguaje

Cuando presentamos las reglas de la cuantificación, nos referimos en el metalenguaje a las expresiones (constantes y variables) singulares y al resto de la oración en que aparecen.

1. Para referirnos a las constantes y variables individuales de una oración (e. d., los símbolos para cosas), usaremos como símbolos metalingüísticos las letras u y v, reemplazables por términos singulares, p. ej., q (don Quijote) (1.2.1).
2. Para referirnos a la *fórmula*, o mejor dicho al resto de la fórmula, en el que aparecen las expresiones individuales, usaremos las letra griega ϕ (fi). La ϕ puede hacer las veces tanto de las oraciones atómicas como de las moleculares. Recuerde que los *predicados* (e. d, símbolos para *propiedades* sencillas y relacionales) están incluidos en la oración representada por ϕ.

Por ejemplo, en ϕu (o ϕv), ϕ es una oración en que aparece, una o más veces (o inclusive ninguna vez), el término indicado por u (v). En vez de usar ϕu, podríamos usar puntos suspensivos de esta manera: ...u...[45]

Digamos que en ϕu, u corresponde a x; entonces las siguientes expresiones podrían ser sustituciones válidas de ϕu:

[45] Fitch, p.137.

Fx (también *Gx*, *Aqx*...)
Axx (también *Dxdx*...)
E*yFy* (también U*zAqz*, U*xFx*...)
[*Fx* > *Gx*] (también [*Fy* & *Gx*], [E*xFx* > *Ga*]...)
E*y*[*Fx* & *Lqy*] (también U*z*[*Czx* v E*yAzy*]...)

Recuerde que por ser metalingüística, la expresión *øu* se refiere a las oraciones del lenguaje-objeto, las cuales pueden expresar una proposición sobre el mundo.

2.3.2 La regla de la eliminación del cuantificador universal

Las dos reglas **ecu** e **ice**, a diferencia de la introducción del cuantificador universal (**icu**) y de la eliminación del cuantificador existencial (**ece**), tienen lo siguiente en común:

- *ligan las expresiones gobernadas por cuantificadores con las fórmulas que no los tienen* (en la lógica libre la validez de estas reglas pedirá una premisa adicional, 3.5)
- *se puede (y a veces se debe)* cambiar *la letra que se usa como constante o variable singular*
- *no emplean subpruebas generales* (por ende carecen de las restricciones en torno a éstas)

Hemos visto ya el sentido de estas reglas (2.2.2).

ecu: *eliminación del cuantificador universal*

La regla (2.2.2):

1	(U*u*)*øu*	**h**
2	*øv*	1 **ecu** *v/u*

En esta regla, *u* hace las veces de cualquier *variable singular* (*x*, *y* o *z*), pero *v* hace las veces o de cualquier *variable singular* (*x*, *y* o *z*) o de cualquier *constante singular* (*a*, *b*, *q*, *r*, etc.). La variable *u* tampoco tiene que aparecer dentro de la expresión representada por *ø* (ni *v*). Los símbolos *u* y *v* pueden ser reemplazados por la misma letra (en este caso debe ser una variable, *x*, *y* o *z*).

La línea diagonal "/" (2.2.2) significa "se pone en vez de". Si *v* es distinto de *u*, hay que escibir *v/u* después de "**ecu**" (*v* indica la nueva letra). Cuando no se cambia la letra, no se agrega *v/u*.

Después de quitar el cuantificador representado por U*u*, pues, se puede:

a) dejar la variable que reemplaza a *u* (sin cambiarla):

1	U*xHx*	**h**
2	*Hx*	1 **ecu**

b) cambiar la letra que reemplaza *u* con otra letra que reemplaza *v* (en este caso hay que usar *v/u*). La nueva letra puede ser:

1. otra *variable* singular; por ejemplo:

1	U*xHx*	**h**
2	*Hy*	1 **ecu** *y/x*

2. una *constante* singular; por ejemplo:

1	U*xHx*	**h**
2	*Ha*	1 **ecu** *a/x*

Existe una restricción importante cuando el cuantificador que se va a quitar liga más de una letra (p. ej.: U*x*[*Hx* > *Gx*]):

> *si se cambia las letras ligadas por un cuantificador universal que se quita, hay que cambiar todas las letras ligadas.*

No se puede hacer esto:

NO	1	U*x*[*Hx* > *Axd*]	**h**
		Ha > *Axd*	1 **ecu** *a/x*— INVÁLIDO

La nueva constante *a* debe reemplazar a ambas equis:

1	U*x*[*Hx* > *Axd*]	**h**
2	*Ha* > *Aad*	1 **ecu** *a/x*

Todas estas inferencias se permiten:

1	U*xFx*	**h**
2	*Fx*	1 **ecu**
3	Fz	1 **ecu** *z/x*
4	*Fa*	1 **ecu** *a/x*

1	$Ux[Hx > Ax]$	**h**
2	$Hx > Ax$	1 **ecu**
3	$Hy > Ay$	1 **ecu** y/x
4	$Ha > Aa$	1 **ecu** a/z

Existe también una restricción de la nueva letra que se escoge en la presencia de un cuantificador existencial:

> *no hay que escoger una letra que vaya a ser capturada por un cuantificador existencial que forme parte de ϕu.*

Si se viola esta restricción puede ocurrir lo siguiente: en este ejemplo, el universo del discurso son los números, "<" significa "es menor que" y los paréntesis "( )" encierran la proposición atómica: "x es menor que y":

NO	1	$UxEy(x < y)$	**h**
	2	$Ey(y < y)$	1 **ecu** y/x— VIOLACIÓN

Traducción:

1	Para cualquier número x, hay un número y tal que x es menor que y (para cada número hay un número mayor).
2	Hay un número y que es menor que sí mismo.

La restricción no se aplica cuando se trata de un cuantificador universal en las mismas circunstancias. Por ejemplo:

1	$UxUyAxy$	**h**
2	$UyAyy$	1 **ecu** y/x

En el paso 2, Uy captura la primera y de Ayy, pero no hace daño, porque si es cierto (como se afirma en el primer paso) que cada cosa guarda la relación A con cada cosa, entonces también cada cosa la guarda con sí misma.

2.3.3 Silogismos

Uno de los aportes más importantes de Aristóteles a la lógica fue su desarrollo de la *silogística* (2.4). El siguiente argumento es un "silogismo" en el sentido amplio (no es un silogismo "aristotélico" porque el segundo paso no está cuantificado):

| Todo ser humano es mortal.
| Sócrates es un ser humano.
|-
| Sócrates es mortal.

Se prueba (y se establece la validez de tal forma lógica) de esta manera:

1	Ux[$Hx > Mx$]	**h**
2	Hs	
3	$Hs > Ms$	1 **ecu** *s/x*
4	Ms	2, 3 **mp**

Otro ejemplo:

| Ningún hombre es isla.
| Irlanda es una isla.
|-
| Irlanda no es hombre.

Y su prueba:

1	Ux[$Hx > \sim Ix$]	**h**
2	Ii	**h**
3	$Hi > \sim Is$	1 **ecu** *s/x*
4	$\sim Hi$	2, 3 **mt**

* UNIDAD DE EJERCICIOS 12: LA REGLA **ecu**

A. Resuelva:

A1. U$xp > p$
A2. [UxFx & $\sim Fa$] $> p$
A3. [Ux[Gx v Fx] & $\sim Fa$] $> Ga$
A4. [[Fb v Hb] $> q$] & UxFx] $> q$
A5. $\sim Fd > \sim$UxFx

A6.1	Ux[$Fx > Gx$]
2	Ux[$Gx > Hx$]
3	Fb
	...
	Hb

A7.

1	Uz[$Fz > Gz$]
2	Ux[$Gx > Hx$]
3	Fb
	...
	Hb & Gb

A8.

1	Ux[$Rxa > Saa$]
2	Raa
	...
	Saa

A9.

1	Uy[$Gy > \sim Ray$]
2	[$Fa > Fa$] $> Raa$
	...
	$\sim Ga$

A10. Ux[$\sim Gx$ & Fx] > [Fa & $\sim Ga$]

B. Traduzca y resuelva:

B1. Si todo es concebible, entonces lo es Napoleón.
B2. Si todo es autoidéntico (*I*), incluso mi abuela es autoidéntica.
B3. Si Dios da cuenta de todo, entonces da cuenta de sí mismo.
B4. Premisas: *1*) Todo cascabel es una víbora. *2*) Óscar es un cascabel. Conclusión: Óscar es una víbora.
B5. Premisas: *1*) Todo cascabel es una víbora. *2*) Toda víbora es un reptil. *3*) Óscar es un cascabel. Conclusión: Oscar es un reptil.
B6. Premisas: *1*) Cada virtud (*Vx*: *x* es virtud) aumenta el poder (*Px*: *x* aumenta el poder) o aumenta la felicidad (*Fx*: *x* aumenta la felicidad). *2*) La justicia es una virtud pero no aumenta el poder. Conclusión: La justicia aumenta la felicidad.
B7. Si Dios lo crea todo pero no se crea a sí mismo, entonces no lo crea todo.
B8. Si todo es absurdo, entonces también es absurda la proposición de que todo es absurdo.
B9. No todo es tonto si no lo soy yo.
B10. Rocinante es bobo y tonto si todo es tonto y bobo.

2.3.4 La regla de la introducción del cuantificador existencial

ice: *introducción del cuantificador existencial:*

La regla (2.2.2):

1	ϕv	**h**
2	E$u\phi u$	1 **ice** *u/v*

En esta regla, *v* hace las veces o de cualquier constante singular (*a*, *b*, *d*, *r*...) o de cualquier variable singular (*x*, *y*, *z*) y *u* hace las veces de cualquier variable singular (*x*, *y*, *z*); esta letra no puede ser constante porque es cuantificada.

Hay varios casos posibles, pues; si *v* en *øv* es:

1. una variable, se puede:

a) usar la misma letra como variable al aplicar **ice**:

1	*Fx*	**h**
2	E*xFx*	1 **ice**

b) usar otra letra como variable (hay que usar *u/v* para indicar el cambio de la letra):

1	*Fx*	**h**
2	E*yFy*	1 **ice** *x/y*

2. una constante, *hay* que usar una letra variable (*x*, *y* o *z*) al aplicar **ice**:

1	*Fa*	**h**
2	E*zFz*	1 **ice** *z/a*

Si la expresión a la que se aplica **ice** contiene más de una ocurrencia de la letra que se quiere ligar, *no* hay que reemplazar cada una con la variable. Recuérdese que en **ecu**, hay que reemplazar todas las letras ligadas por el cuantificador universal que se va a quitar (2.3.2). La siguiente inferencia, pues, es correcta:

1	*Hx & Axd*	**h**
2	E*x*[*Ha & Axd*]	1 **ice** *a/x*

Es fácil ver por qué esto es cierto (*Axy*: *x* afeita a *y*; *q*: don Quijote):

1	*Aqq*	**h**
2	E*xAxx*	1 **ice** *x/q*
3	E*xAqx*	1 **ice** *x/q*
4	E*xAxq*	1 **ice** *x/q*

Si don Quijote se afeita a sí mismo, entonces: algo se afeita a sí mismo (paso 2), don Quijote afeita algo (3) y algo afeita a don Quijote (4).

El caso es igual cuando se trata de una oración molecular gobernada por el cuantificador:

1	*Ha* & *Ra*	**h**
2	E*x*[*Hx* & *Ra*]	1 **ice** *x/a*
3	E*x*[*Ha* & *Rx*]	1 **ice** *x/a*
4	E*x*[*Hx* & *Rx*]	1 **ice** *x/a*

Existe una restricción en torno a la elección de una nueva letra:

> *No hay que escoger una letra que ya esté en la expresión* øv *y que vaya a ser capturada por el nuevo cuantificador existencial.*

No se puede hacer lo siguiente (*j*: el elefante Jumbo; *A*: aplastar):

NO

	...
n	*Ajx*
	E*xAxx* *n* **ice** *x/j*— VIOLACIÓN

si Jumbo aplasta a *x*, entonces algo se aplasta a sí mismo. Es un error, porque el hecho de guardar *j* la relación *A* con *x* no implica que se la guarde consigo misma. Mostraremos abajo (2.3.7) que si se viola la restricción, el hecho de aplastar Jumbo a Tarzán implicaría que se aplasta a sí mismo. En cambio, es correcto hacer lo siguiente:

	...	
n	*Ajx*	
	E*yAyx*	*n* **ice** *y/j*

se sigue que si Jumbo aplasta a *x*, entonces algo aplasta a *x*.

Un ejemplo:

1	Todo hombre es mortal.
2	Sócrates es un hombre.
3	Algún hombre es mortal.

1	Ux[Hx > Mx]	**h**
2	Hs	**h**
3	Hs > Ms	1 **ecu** *s/x*
4	Ms	2, 3 **mp**
5	Hs & Ms	2, 4 **ic**
6	Ex[Hx & Mx]	5 **ice**

* UNIDAD DE EJERCICIOS 13: LAS REGLAS **ecu**, **ice**

A. Resuelva:

A1. p > Exp
A2. UyFy > [Fy > EzFz]
A3. [UxGx & [ExGx > p] > p
A4. [Fb & Gb] > Ex[Gx & Fx]
A5. [Ux[Fx > Gx] & Fc] > Ez[Fz & Gz]

A6.

1	Ux[Fx > Gxa]
2	Ux[Gxa > Hxa]
3	Fb
	...
	Ex[Hxa & Gxa & Fx]

A7.

1	UxGx
2	EyGy > Fa
	...
	Ez[Fz & Gz]

A8.

1	Ux[Rxa > Saa]
2	Raa
	...
	Ex[Rxa & Sax]

A9.

1	EzFz > UxGx
2	Fa
	...
	Ey[Fy & Gy]

A10. Ex~Fx v Fa

B. Traduzca y resuelva:

B1. Si Napoleón es comprensible, entonces algo es comprensible.
B2. Algo es autoidéntico si lo es mi abuela.
B3. Dios da cuenta de algo si da cuenta de todo.
B4. Algo da cuenta de Dios si Dios da cuenta de todo.
B5. Si don Quijote es tonto y bobo, algo es tonto y bobo.
B6. Premisas: *1*) Don Quijote ama a Dulcinea ssi Dulcinea ama a don Quijote. *2*) Don Quijote ama a Dulcinea. Conclusión: Quijote y Dulcinea se aman uno a otro.
B7. Si Dios no se crea a sí mismo, entonces existe algo que Dios no crea.
B8. Si todo es absurdo, entonces hay una proposición absurda.
B9. Si no hay nada tonto, entonces no todo es tonto.
B10. Hay algo tonto y bobo si Rocinante es bobo y tonto.

2.3.5 Las subpruebas generales y sus restricciones

Las reglas **icu** y **ece** (a diferencia de **ecu** e **ice**) tienen en común que:

1. *No ligan las expresiones cuantificadas con las no cuantificadas.*
2. *Hacen uso de subpruebas generales* (véase abajo).
3. *Hay restricciones que limitan lo que puede meterse en la subprueba general y, en* **ece**, *también lo que puede sacarse de la subprueba.*
4. *No puede cambiarse la letra que se usa como constante o variable singular.*

Las reglas **icu** y **ece** requieren secuentes especiales llamados secuentes subordinados generales o *subpruebas generales*. Una de éstas tiene un *índice*: una letra que corresponde a una variable (x, y, z) colocada a la izquierda en la parte superior del secuente. La subprueba puede ser categógica (sin rayita —como el caso de la regla **icu**—) o hipotética (con rayita —como el caso de **ece**—), y por ende las subpruebas generales hipotéticas tienen hipótesis. Tenemos pues:

La subprueba categórica corresponde al cuantificador "fuerte", el universal, y la hipotética al "débil", el existencial.

Para observar las restricciones de las subpruebas generales, es importante recordar la distinción entre una variable libre y ligada (véase 2.2.2). P. ej., en

$$UxHx > Ax$$

la x de Hx está ligada, pero la de Ax es libre; en cambio, en

$$Ux[Hx > Ax]$$

el cuantificador liga las dos x, tanto en Hx como en Ax, y por lo tanto no son libres.

Así se expresa la *restricción de iteración* para todas las subpruebas generales, tanto categóricas como hipotéticas (y por ende vale tanto para **icu** como para **ece**):

> *No debe iterarse en una subprueba general ninguna expresión que contenga la variable del índice libre.*

En otras palabras, si x es el índice de la subprueba, no puede iterarse en ella ninguna expresión que tenga una x libre. Pero sí puede iterarse una expresión que contiene una x *ligada* por un cuantificador, y puede iterar cualquier expresión que *no contiene ninguna* x. Todas las siguientes expresiones, pues, pueden iterarse en la subprueba general menos la primera (Fx):

1	Fx	— no puede iterarse
2	$UxFx$	
3	$ExFx$	
4	Fa	pueden iterarse
5	Fz	
6	$UyFy$	
	x	

En el caso de **ece**, la restricción se aplica no sólo a lo que se mete en la subprueba general, sino también a lo que se *saque* de la subprueba; hay, pues, una restricción de extracción:

> *No debe sacarse de la subprueba general por la regla* **ece** *ninguna expresión que contenga la variable del índice libre.*

Si esta regla se viola, puede demostrarse que si algo es un burro, yo soy un burro (véase abajo 2.3.7).

* UNIDAD DE EJERCICIOS 14: RESTRICCIONES

A. Diga cuáles variables son libres y cuáles ligadas.

A1. $ExAz$
A2. p & $EzAz$
A3. $Ez[p \& Az]$
A4. $Ex[p \& Az]$
A5. $UxLxa$
A6. $UxLxx$

A7. U*x*U*y*L*yx*
A8. U*y*E*z*[*Hz* & *Lzy*]
A9. U*x*[*Hz* & E*xAx*]
A10. E*xHx* & *Fx*
A11. E*xHx* & E*xFx*
A12. U*x*U*z*[[*Fx* & *Gz*] > E*yGxzy*]

B. Diga cuáles de estas expresiones pueden iterarse en la subprueba general (cuyo índice, por supuesto, es *y*):

1	*p*
2	*q*
3	*p* & *q*
4	*Fy*
5	*p* & *Fy*
6	*p* & E*yFy*
7	U*xFx*
8	*Fx*
9	U*yLay*
10	E*yLyy*
11	U*xFy*
12	E*xFy*
	—
y	¿?

C. ¿Qué expresiones puede sacar de la subprueba general con la regla **ece** (el índice, claro, es *z*)?

z	
	—
	p
	p & *q*
	Fz
	p & *Fz*
	p & E*zFz*
	U*xFx*
	Fx
	U*zLaz*
	E*zLzz*
	U*xFz*
	E*xFz*
¿?	

2.3.6 La regla de la introducción del cuantificador universal

icu: *introducción del cuantificador universal*

En esta regla, la ϕ hace las veces de cualquier oración, atómica o molecular. La u que sigue ϕ hace las veces de cualquier variable (x, y, z) y puede ocurrir una o más veces (o ninguna vez). Recuerde que no puede iterarse en la subprueba ninguna expresión con u libre. La referencia numérica alude a la subprueba.

1	u	RESTRICCIÓN DE ITERACIÓN
	...	
n	ϕu	
$n+1$	$\mathrm{U}u\phi u$	1-n **icu**

Un ejemplo: "si todo hombre es un animal, entonces si todo es un hombre, todo es un animal":

1	$\mathrm{U}x[Hx > Ax]$	**h**
2	$\mathrm{U}xHx$	**h**
3	x $\mathrm{U}x[Hx > Ax]$	1 **i**
4	$\mathrm{U}xHx$	2 **i**
5	$Hx > Ax$	3 **ecu**
6	Hx	4 **ecu**
7	Ax	5, 6 **mp**
8	$\mathrm{U}xAx$	3-7 **icu**
9	$\mathrm{U}xHx > \mathrm{U}xAx$	2-9 **ii**

Note que la x no es libre en los pasos 1 y 2 y por lo tanto éstos pueden iterarse en la subprueba (3 y 4).

Aquí está el silogismo que los escolásticos llamaban "Bárbara":

Todo ser humano es un animal.
Todo animal es mortal.

Todo ser humano es mortal.

En la siguiente prueba no es necesario usar más de una letra (pudiéramos haber usado puras equis); hemos usado tres (x, y, z) para mostrar cómo se cambian con **ecu**.

1		$Ux[Hx > Ax]$	**h**
2		$Uy[Ay > My]$	**h**
3	z	Hz	**h**
4		$Ux[Hx > Ax]$	1 **i**
5		$Uy[Ay > My]$	2 **i**
6		$Hz > Az$	4 **ecu** z/x
7		$Az > Mz$	5 **ecu** z/y
8		Az	3, 6 **mp**
9		Mz	7, 8 **mp**
10		$Hz > Mz$	3-9 **ii**
11		$Uz[Hz > Mz]$	3-10 **icu**

La notación escolástica (2.2.4) sería:

1	HaA	**h**
2	AaM	**h**
3	HaM	1, 2 Bárbara

donde usamos la pauta válida "Bárbara" como regla.

No importa las letras que usemos como variables con tal de que se evite la ambigüedad. Antes de proceder a la demostración de que $UxUyGxy$ equivale a $UyUxGyx$ (e. d., que pueden cambiarse las letras variables), estudie estas dos aplicaciones de **ecu**:

1			$UxUyGxy$	
2	y	x	$UxUyGxy$	1 **i**
3			$UyGyy$	2 **ecu** y/x
4			Gxx	3 **ecu** x/y

Es evidente que no podemos sacar Gyx en 4, porque tenemos dos y en 3 y al quitar el cuantificador Uy, por ser universal, debemos cambiar *todas* las variables que gobierna (si es que las queremos cambiar), por ende las dos y (como en 4). Pero podemos hacer un "truco", usando temporalmente la letra z, como es evidente en la demostración:

1	UxUyGxy	**h**
2	y | x | z | UxUyGxy	1 **i**
3	UyGzy	2 **ecu** *z/x*
4	Gzx	3 **ecu** *x/y*
5	UzGzx	2-4 **icu**
6	Gyx	5 **ecu** *y/z*
7	UxGyx	2-6 **icu**
8	UyUxGyx	2-7 **icu**
9	UyUxGyx	**h**
10	x | y | z | UyUxGyx	9 **i**
11	UxGzx	10 **ecu** *z/y*
12	Gzy	11 **ecu** *y/x*
13	UzGzy	10-12 **icu**
14	Gxy	13 **ecu** *x/z*
15	UyGxy	10-14 **icu**
16	UxUyGxy	10-15 **icu**
17	UxUyGxy <> UyUxGyx	1-8, 9-16 **ici**

* UNIDAD DE EJERCICIOS 15: LAS REGLAS **icu, ecu, ice**

A. Resuelva:

A1. p <> Uxp
A2. UzU$y$$Fxy$ <> UyU$z$$Fxy$
A3. UxU$y$$Fxy$ > Fyy
A4. UxUzU$y$$Fxyz$ > UzUyU$x$$Fxyz$
A5. [U$x$$Fx$ v U$x$$Gx$] > U$x$[$Fx$ v Gx] (¿Por qué no al revés?)
A6. Ux[Fx <> Gx] > [U$x$$Fx$ <> U$x$$Gx$] (¿Por qué no al revés?)
A7. Ux[Fx > Gx] > [U$x$$Fx$ > U$x$$Gx$] (¿Por qué no al revés?)
A8. Uy[[Fy v U$x$$Gxy$] > U$x$[$Fy$ v Gxy]]
A9. [Ux[[Fx v Gx] > Hx] & U$z$$Fz$] > U$z$$Hz$
A10. Ux[U$y$$Fxy$ & U$z$$Gz$] > U$zUyUx$[$Fxy$ & Gz]
A11. UzU$y$$Gzy$ <> UyU$z$$Gyz$
A12. [U$x$$Fx$ & [Fy > Rya]] > Rya
A13. [Gx & Uz[Gz > U$x$$Gx$]] > U$x$[[$Gx$ > Hx] > Hx]
A14. [Uz[Rza > p] & U$y$$Gy$ & Uz[Gz > Rza]] > p
A15. Uz[U$x$$Szx$ > ExU$y$$Sxy$]

B. Traduzca y resuelva:

B1. Si ningún hombre es isla y todo islandés es un hombre, entonces ningún islandés es isla.
B2. Si Carlos ama a toda mujer y toda amazona es mujer, entonces Carlos ama a todas las amazonas.

2.3.7 La regla de la eliminación del cuantificador existencial

ece: *eliminación del cuantificador existencial*

En la siguiente regla, u hace las veces de cualquier variable singular (x, y, z). Recuerde que lo que se mete en, y lo que se saca de, la subprueba general no debe contener u libre (2.3.5); por lo tanto, A no debe contener u libre.

1		$\mathrm{E}u\phi u$	
2	u	ϕu	RESTRICCIÓN DE ITERACIÓN
		...	
n		A	RESTRICCIÓN DE EXTRACCIÓN
$n+1$		A	1, 2-n **ece**

Note que los números de la justificación de **ece** (paso $n + 1$) se refieren al paso cuyo cuantificador existencial se quita (1) y a la subprueba general (2-n).

He aquí un ejemplo del uso correcto de **ece**:

1		$\mathrm{E}x[Hx \,\&\, Mx]$	**h**
2	x	$Hx \,\&\, Mx$	**h**
3		Hx	2 **ec**
4		$\mathrm{E}xHx$	3 **ice**
5		$\mathrm{E}xHx$	1, 2-3 **ece**

"Si algún hombre es mortal, entonces hay al menos un hombre." Observe que Hx en el paso 3 *no* podría sacarse de la subprueba, porque la x de Hx es libre. Pero al agregar el cuantificador Ex en el paso 4 (con **ice**), la x se liga y puede sacarse de la subprueba.
Para evitar la confusión, note también que, paradójicamente tal vez, se usa la regla de la *eliminación* del cuantificador existencial para introducir un cuantificador existencial (paso 5).

Aquí está una demostración de la validez del silogismo "Darii":

1	Todo ciclista es deportista.
2	Algún matemático es ciclista.
3	Algún matemático es deportista.

1		Ux[$Cx > Dx$]	**h**
2		Ex[Mx & Cx]	**h**
3	x	Mx & Cx	**h**
4		Mx	3 **ec**
5		Cx	3 **ec**
6		Ux[$Cx > Dx$]	1 **i**
7		$Cx > Dx$	6 **ecu**
8		Dx	5, 7 **mp**
9		Mx & Dx	4, 8 **ic**
10		Ex[Mx & Dx]	9 **ice**
11		Ex[Mx & Dx]	2, 3-10 **ece**

En símbolos escolásticos:

1	CaD	**h**
2	MiC	**h**
3	MiD	1, 2 Darii

donde usamos la pauta de "Darii" como regla.

Dijimos (2.3.5) que si se viola la restricción de sacar de la subprueba expresiones que contienen la letra del índice libre, podemos probar que si algo es un burro, yo (a) soy un burro. Aquí está la prueba:

NO	1	x	ExBx	**h**
	2		x Bx	**h**
	3		Bx	2 **r**
	4		Bx	1, 2-3 **ece**— VIOLACIÓN
	5		E$xBx > Bx$	3-4 **ii**
	6		Ux[E$xBx > Bx$]	1-5 **ecu**
	7		E$xBx > Ba$	6 **ecu** a/x

Note que en paso 6, al quitarse Ux, no se afecta la x en ExBx porque si bien está dentro del dominio de Ux, es ligada inmediatamente por Ex.

También vimos (2.3.4, nota) la restricción de sustitución en el caso de **ice**: no debemos escojer una letra que ya esté en la expresión y que sea capturada por el nuevo cuantificador. Si se viola esta restricción, puede suceder lo siguiente (A: aplastar, j: el elefante Jumbo y t: Tarzán):

NO	1	Ajt	**h**
	2	E$xAjx$	1 **ice** x/t
	3	x | Ajx	**h**
	4	| E$xAxx$	2 **ice** x/j— VIOLACIÓN
	5	E$xAxx$	2, 3-4 **ece**

si Jumbo aplasta a Tarzán, entonces algo se aplasta a sí mismo.

2.3.8 Equivalencias de Sherwood

Las siguientes equivalencias aparecen ya en la historia de la lógica en un manuscrito de William of Sherwood (primera mitad del siglo XIII). Se llaman generalmente "equivalencias de De Morgan" para los cuantificadores, porque se suponía que el lógico inglés había sido el primero en notarlas. Sin embargo, usaremos "**sh**" (Sherwood) para justificar la deducción de una proposición a su forma equivalente (así como usamos "**oc**" en vez de "**dm**" para las equivalencias proposicionales de arriba).

$$\begin{array}{lcl} \mathrm{U}u\phi u & <> & \sim\mathrm{E}u\sim\phi u \\ \sim\mathrm{U}u\phi u & <> & \mathrm{E}u\sim\phi u \\ \mathrm{U}u\sim\phi u & <> & \sim\mathrm{E}u\phi u \\ \sim\mathrm{U}u\sim\phi u & <> & \mathrm{E}u\phi u \end{array}$$

Ejemplos:

1	U$x\sim Jx$	**h**
2	$\sim$ExJx	1 **sh**

si todo no es justo, entones no hay nada justo. Otro ejemplo:

1	E$x\sim[Hx$ & $Fx]$	**h**
2	$\sim$U$x[Hx$ & $Fx]$	1 **sh**

Se permite que la regla **sh** se aplique a varios cuantificadores a la vez (véase 4.1.7), y para indicar este atajo escribiremos el número de veces que se aplica entre paréntesis: en este caso, "(2)":

1	~U*x*E*y*F*xy*	**h**
2	E*x*U*y*~F*xy*	1 **sh** (2)

La derivación completa, sin el atajo, sería:

1		~U*x*E*y*F*xy*	**h**
2		E*x*~E*y*F*xy*	1 **sh**
3	*x*	~E*y*F*xy*	**h**
4		U*y*~F*xy*	3 **sh**
5		E*x*U*y*~F*xy*	4 **ice**
6		E*x*U*y*~F*xy*	2, 3-5 **ece**

Las equivalencias de **sh** pueden demostrarse como en estos ejemplos:

1			U*x*~F*x*	**h**
2		*c*	E*x*F*x*	**h**
3		*x*	F*x*	**h**
4			~F*x*	1 **i, ecu**
5			~E*x*F*x*	3, 4 **eng**
6			~E*x*F*x*	2, 3-5 **ece**
7			~E*x*F*x*	2-6 **ing**
8			~E*x*F*x*	**h**
9	*x*	*c*	F*x*	**h**
10			E*x*F*x*	9 **ice**
11			~E*x*F*x*	8 **i**
12			~F*x*	9-11 **ing**
13			U*x*~F*x*	9-12 **icu**
14			U*x*~F*x* <> ~E*x*F*x*	1-7, 8-13 **ici**

1					Ex~Fx	**h**
2		c			U$x$$Fx$	**h**
3					Ex~Fx	1 **i**
4			x		~Fx	**h**
5					Fx	2 **i**, **icu**
6					~U$x$$Fx$	4, 5 **eng**
7					~U$x$$Fx$	3, 4-6 **ece**
8					~U$x$$Fx$	2-7 **ing**
9					~U$x$$Fx$	**h**
10		c			~Ex~Fx	**h**
11			x	c	~Fx	**h**
12					Ex~Fx	11 **ice**
13					~Ex~Fx	10 **i**
14					Fx	11-13 **ing**
15					U$x$$Fx$	11-14 **icu**
16					~U$x$$Fx$	9 **i**
17					Ex~Fx	10-16 **ing**
18					Ex~Fx <> ~U$x$$Fx$	1-8, 9-17 **ici**

2.3.9 La paradoja de Russell

La cuantificación de los predicados y la predicación de orden superior (2.2.5) nos permiten examinar la conocida *paradoja de Russell* (3.4.1). Algunas clases (conjuntos) no son miembros de sí mismas; la clase F no es miembro de sí misma se representa como $\sim FF$ ("F no es F"). O, en términos de propiedades, algunas de éstas no se poseen a ellas mismas como propiedad. P. ej., la clase de los hombres (H) no es miembro de sí misma, porque la clase de los hombres no es ella misma un hombre (pues es una clase). O, alternativamente, la propiedad de ser un hombre no tiene la propiedad de ser un hombre, porque la propiedad de ser hombre no es ella misma un hombre (sino una propiedad). Podemos decir, pues: $\sim HH$.

En cambio, la clase de las cosas autoidénticas (I) es miembro de sí misma, porque tal clase es ella misma idéntica consigo misma. O la propiedad de ser autoidéntico es ella misma autoidéntica. Podemos decir, pues: II.

Sea K la clase de todas las clases que no son miembros de sí mismas (la propiedad que tienen esas propiedades que no se tienen a sí mismas como propiedades). Frege explicó la paradoja así:

La clase de los hombres no es un hombre; es una clase que no es miembro de sí misma. Llamemos K a la clase de todas las clases que no son miembros de sí mismas. Ahora preguntemos si K es un miembro de sí misma. Si sí, es una clase que *no* es miembro de sí misma, y nos lleva a una contradicción. Si no, es una clase que *sí* es un miembro de sí misma, y otra vez nos encontramos en una contradicción.

Una clase, pues, es miembro de K si y sólo si no es miembro de sí misma. La clase de los hombres no es miembro de sí misma, y por eso: KH. La clase de las cosas autoidénticas es miembro de sí misma y, por eso: $\sim KI$. Representemos esto como la definición

$$KF =_{df} \sim FF$$

de tal manera que cuando tengamos una clase F que no es miembro de sí misma ($\sim FF$), es miembro de $K(KF)$, y podemos sustituir una expresión por la otra (usando "$\mathbf{r}_{df}$" como justificación). Entonces, hablando de K misma, tenemos:

1	$\vert\ KK$	**h**
2	$\vert\ \sim KK$	1 $\mathbf{r}_{df}$
3	$\sim KK$	1-2 **ing**
4	$\vert\ \sim KK$	**h**
5	$\vert\ KK$	4 $\mathbf{r}_{df}$
6	KK	4-5 **ing**

y sale una contradicción (pasos 3 y 6), lo cual sería fatal para nuestro sistema, pues lo haría inconsistente.

Se han sugerido varias maneras de salir de la dificultad. Russell mismo ofreció una solución que descansa en la noción de niveles o tipos. Los conjuntos, dice, forman una jerarquía; los individuos, los cuales no son ellos mismos conjuntos (p. ej., Napoleón, César, n, c) están en el nivel 0, los conjuntos a que estos individuos pertenecen (p. ej., *hombre*, H) están en el nivel 1, y los conjuntos a que estos conjuntos pertenecen (p. ej., el conjunto de los conjuntos que no son miembros de sí mismos, K) están en el nivel 2:

tipo	
2	K
1	H
0	$n, c, \ldots$

Entonces Russell exige que el conjunto sea exactamente un número mayor que su miembro: Hc (1-0), KH (2-1), pero no Kc (2-0) ni HH (1-1). Y porque también se excluye KK (2-2), no puede aparecer ninguna contradicción.

Sin embargo, la solución es demasiado drástica, como Russell mismo encontró en las matemáticas, pues, fuera de otros inconvenientes, elimina todos los casos de la autorreferencia, algunos de los que no son dañinos. P. ej., es V decir "esta oración consta de seis palabras". La autoidentidad en efecto parece ser autoidéntica (*II*), pues la clase de las cosas que son idénticas consigo mismas es ella misma idéntica consigo misma (3.2.1). Además, el teorema de Gödel incluye la autorreferencia (0.3).

Varios lógicos opinan que la oración paradójica no es ni V ni F; pero porque no proponen un tercer valor veritativo, no presuponen ninguna lógica plurivalente. Kripke dice que las oraciones paradójicas carecen de valor veritativo y Fitch, que la regla **ing** (que usamos para sacar la contradicción de arriba) no se aplica sino a las proposiciones que son o V o F, y por lo tanto no a *KK*. La limitación del principio de la bivalencia, a propósito, si se acepta tal solución, no debe verse como menoscabo de la lógica; la restricción misma es un ejemplo del uso filosófico de la lógica.

Las paradojas han sido importantes en la historia de la lógica, pues muestran que nuestras intuiciones a veces nos pueden engañar. Un motivo que tuvo Tarski (8.2.1) al formular su teoría de la verdad fue esquivar la paradoja del mentiroso de Eubúlides: "esta oración es F" (ver la introducción) de la cual G. Ryle ofreció una solución ingeniosa: la oración paradójica es inacabada: "esta oración [a saber, de que esta oración [a saber, de que esta oración [...]]] es F". Las paradojas fueron debatidas no sólo por los filósofos griegos sino también por los medievales (los *insolubilia*), sobre todo en la universidad de Oxford en la primera mitad del siglo XIV.

* UNIDAD DE EJERCICIOS 16: LAS REGLAS **icu**, **ecu**, **ice**, **ece**

A. Resuelva, suponiendo que un símbolo proposicional (como p en A4) no contiene la letra del índice (x) libre y que por ende puede iterarse:

A1. $p <> Ezp$
A2. $ExFx > Ex[Fx \vee Gx]$
A3. $ExLxa <> EzLza$
A4. $Ex[p > Fx] > [p > ExFx]$
A5. $ExUyFxy > UyExFxy$ (¿puede demostrarse al revés?)
A6. $Ex[Fx \vee Gx] > [ExFx \vee ExGx]$
A7. $[ExFx \& \sim Ex[Fx \& Gx]] > Ex\sim Gx$
A8. $Ux[\sim Fx \vee Gx] > Ex\sim[Fx \& \sim Gx]$
A9. $[p \vee ExFx] <> Ex[p \vee Fx]$
A10. $Uy[[EzFyz > Hy] > [Fyx > Hy]]$
A11. $ExFx <> EyFy$
A12. $Ex[Fx > p] > [UxFx > p]$
A13. $Ux[Fx > p] <> [ExFx > p]$
A14. $ExEyGxy > EyExGxy$
A15. $ExEyGxy > ExEyGyx$
A16. $Ux[Sx > \sim Px] <> \sim Ex[Sx \& Px]$
A17 $\sim Ux[Sx > Px] <> Ex[Sx \& \sim Px]$.
A18. $[Fa <> Fb] > EX[Xa <> Xb]$
A19. $UX[Xa <> Xb] > [Ha <> Hb]$
A20. $UX[Xa \& Xb] > ExFx$

B. Demuestre estas equivalencias **sh** (sin usar **sh**):

B1. $UxFx <> \sim Ex\sim Fx$
B2. $\sim Ux\sim Fx <> ExFx$

2.4 Silogística

2.4.1 Terminología

El silogismo es una forma de inferencia que en el caso usual consta de dos premisas y una conclusión cuyos términos están cuantificados (2.3.3). El término *medio* aparece una vez en cada premisa, pero no forma parte de la conclusión. Estas palabras técnicas se han entendido de la siguiente manera: el término *mayor* forma parte de la primera premisa (la *mayor*) y el término *menor* forma parte de la segunda premisa (la *menor*). En la inferencia "directa", el término mayor es el predicado y el menor el sujeto de la conclusión; en la "indirecta" están al revés.

Según la posición del término medio hay 4 *figuras* (se ha discutido la vigencia de la cuarta en la historia de la lógica). En los siguientes esquemas, M indica el término medio, P el mayor y S el menor (sujeto y predicado de la conclusión del silogismo directo):

1		2		3		4	
1	$M\,P$	1	$P\,M$	1	$M\,P$	1	$P\,M$
2	$S\,M$	2	$S\,M$	2	$M\,S$	2	$M\,S$
3	$S\,P$	3	$S\,P$	3	$S\,P$	3	$S\,P$

En cada figura hay varias combinaciones posibles de lo que los escolásticos llamaban "cantidad" (cuantificación) y "calidad" (el hecho de ser una proposición afirmativa o negativa), pero sólo algunas combinaciones son lógicamente válidas. Las formas válidas de cada figura se llaman los *modos* de la figura. Se decide la validez según ciertas reglas, algunas aplicables a todo silogismo y otras a una sola figura.

Los escolásticos usaban símbolos proposicionales en este contexto; p. ej., describían el primer modo de la primera figura así:

1	BaA
2	CaB
3	CaA[46]

[46] Alonso de la Vera Cruz, *Recognitio Summularum*, México, Salamanca (1573, 99B).

2.4.2 Axiomatización

La silogística era para Aristóteles un sistema axiomático, pues reducía los otros modos a los cuatro de la primera figura (como axiomas). Los escolásticos dieron nombres a cada forma de cada figura. Los nombres son siglas que contienen mucha información sobre el silogismo particular y sobre la manera de reducción. Las mnemotécnicas de Pedro Hispano, lógico del siglo XIII, eran especialmente populares en los textos de lógica.[47]

He aquí los modos de la primera figura junto con sus nombres ("1:1" significa "primer modo de la primera figura" y "R" indica el modo al que se reduce):

1:1 Bárbara	1:2 Célarent	1:3 Darii	1:4 Ferio
1 *MaP*	1 *MeP*	1 *MaP*	1 *MeP*
2 *SaM*	2 *SaM*	2 *SiM*	2 *SiM*
3 *SaP*	3 *SeP*	3 *SiP*	3 *SoP*

1:5 R1:1	1:6 R1:2	1:7 R1:3	1:8 R1:4	1:9
1 *MaP*	1 *MeP*	1 *MaP*	1 *MaP*	1 *MiP*
2 *SaM*	2 *SaM*	2 *SiM*	2 *SeM*	2 *SeM*
3 *PiS*	3 *PeS*	3 *PiS*	3 *PoS*	3 *PoS*

Las formas silogísticas indirectas 1:5-1:9 tienen los nombres "Baralipton", "Celantes", "Dábitis", "Fapesmorum" y "Frisesomorum". Se reducen a los modos directos 1:1-1:4. P. ej., 1:5 se reduce a 1:1 convirtiéndose la conclusión "accidentalmente". La conversión en general significa cambiar sujeto por predicado; p. ej., "algún matemático es ciclista" se convierte en "algún ciclista es matemático": *SiP* > *PiS*. La conversión es accidental cuando, para preservar la validez, hay que cambiar la cuantificación; p. ej., de "todo mono es primate" se infiere: "algún primate es mono": *SaP* > *PiS* (pero ver 2.4.3). Se realiza la reducción de 1:5 a 1:1 de esta manera:

1	*MaP*	premisa 1 de 1:1
2	*SaM*	premisa 2 de 1:1
3	*PiS*	1, 2 1:5 (conclusión de 1:5)
4	*SaP*	3 conversión accidental (conclusión de 1:1)

[47] Las vocales a, e, i, o señalan el tipo de oración (2.13). Las consonantes se refieren a la reducción: *B*, *C*, *D*, *F* indican la reducción a 1:1, 1:2, 1:3 o 1:4, respectivamente; *s* indica la conversión simple, *p* la accidental, *m* la transposición de las premisas, y *c* la reducción "por lo imposible".

Los pasos 1, 2, 3 constituyen 1:5 y los pasos 1, 2, 4 constituyen 1:1.

Los modos de las figuras 2 y 3:

2:1 R 1:2	2:2 R1:2	2:3 R1:4	2:4 R1:1
Césare	Camestres	Festino	Baroco
1 *PeM*	1 *PaM*	1 *PeM*	1 *PaM*
2 *SaM*	2 *SeM*	2 *SiM*	2 *SoM*
3 *SeP*	3 *SeP*	3 *SoP*	3 *SoP*

3:1 R1:3	3:2 R1:4	3:3 R1:3	3:4 R1:3	3:5 R1:1	3:6 R1:4
Darapti	Felapton	Dísamis	Datisi	Bocardo	Férison
1 *MaP*	1 *MeP*	1 *MiP*	1 *MaP*	1 *MoP*	1 *Me*
2 *MaS*	2 *MaS*	2 *MaS*	2 *MiS*	2 *MaS*	2 *MiS*
3 *SiP*	3 *SoP*	3 *SiP*	3 *SiP*	3 *SoP*	3 *SoP*

2.4.3 Compromiso existencial

La implicación $SaP > PiS$ de arriba no vale si no se expresa el compromiso existencial; e. d., no vale en la transcripción $Ux[Sx > Px] > Ex[Px \& Sx]$:

NO	1	$Ux[Sx > Px]$	**h**
	2	$Sx > Px$	1 **ecu**
		...	
		$Px \& Sx$	— no se puede obtener
		$Ex[Px \& Sx]$	**ice**

Pero se sigue si se expresa el compromiso existencial (paso 2):

1		$Ux[Sx > Px]$	**h**
2		$ExSx$	**h**
3	x	Sx	**h**
4		$Ux[Sx > Px]$	1 **i**
5		$Sx > Px$	4 **ecu**
6		Px	3, 5 **mp**
7		$Px \& Sx$	3, 6 **ic**
8		$Ex[Px \& Sx]$	7 **ice**
9		$Ex[Px \& Sx]$	2, 3-8 **ece**

Vimos (2.2.4) que esta diferencia entre la lógica simbólica y la tradicional se debe a distintas interpretaciones de la proposición universal. En el cuadro de oposición predicativo, no valen, sin expresar el compromiso existencial, las implicaciónes subalternas: $SaP > SiP$ y $SeP > SoP$, las cuales corresponden a $Ux[Sx > Px] > Ex[Sx \& Px]$ y $Ux[Sx > \sim Px] > Ex[Px \& \sim Sx]$. Esta última implicación se demuestra así ($ExSx$ expresa el compromiso existencial y se incluye en el primer paso):

1		$ExSx \& Ux[Sx > Px]$	**h**
2		$ExSx$	1 **ec**
3		$Ux[Sx > Px]$	1 **ec**
4	x	Sx	**h**
5		$Ux[Sx > Px]$	3 **i**
6		$Sx > Px$	5 **ecu**
7		Px	4, 5 **mp**
8		$Px \& Sx$	4, 7 **ic**
9		$Ex[Px \& Sx]$	8 **icu**
10		$Ex[Px \& Sx]$	2, 4-9 **ece**
11		$[ExSx \& Ux[Sx > Px]] > Ex[Px \& Sx]$	1-10 **ii**

Algunas formas silogísticas como 1:5 anterior, pues, son inválidas si no se expresa el compromiso existencial. En efecto, si la conclusión del silogismo es particular (si son formas *a* y *e*, como *SaP* y *SeP*) y al menos una premisa de un silogismo no es particular, hay que explicitar el compromiso existencial.

* UNIDAD DE EJERCICIOS 17: SILOGÍSTICA

A. Traduzca estos silogismos y pruebe su validez:

A1. Celarent (1:2):

1 Ningún anfibio es primate.
2 Todo sapo es un anfibio.
...
Ningún sapo es primate.

A2. Ferio (1:4):

1 Ningún alemán es chino.
2 Algún futbolista es un alemán.
...
Algún futbolista no es chino.

B. Escoja dos silogismos que necesitan expresión del compromiso existencial y dos que no la necesitan (de la segunda o tercera figura) y pruebe su validez.

Capítulo 3

LÓGICA DE LA IDENTIDAD

3.1 Formalización

3.1.1 El sentido de la identidad

Una manera (no la única) de concebir la identidad es: "dos nombres para la misma cosa". Cuando decimos "nombres" también incluimos cualquier expresión, como una descripción definida, que entresaca una sola cosa para referirse a ella.

Napoleón (n) es idéntico con Bonaparte (b) en este sentido y don Quijote con Alonso Quijano (a), porque son dos nombres para la misma persona. Y la estrella matutina (m) es idéntica con la vespertina (v), ya que las dos son Venus. Colón es el descubridor de América, c es idéntico con d. Tales proposiciones se llaman *identidades*.

También podemos hablar de la identidad de las propiedades. p. ej., el ser *palta* (P) es idéntico con el ser *aguacate* (A), o sea, que P es idéntico con A. También, donde "esta fruta" es f, Pf es idéntico con Af. Asimismo, 7 es idéntico con 4 + 3. En efecto, la identidad es fundamental para estudiar la relación entre las matemáticas y la lógica (3.1.3).

La identidad también es la relación clave en la interpretación extensional escolástica de la proposición (2.2.7). Los lógicos del siglo de oro, p. ej., acostumbraban reducir las oraciones generales, como "todo hombre es animal", a redes de conjunciones y disyunciones de oraciones singulares de la forma: "este hombre es idéntico con aquel animal", donde las descripciones como "este hombre" se llaman "términos vagos".

3.1.2 Símbolo

Usamos "=" como símbolo de la identidad; puede leerse "es idéntico a", "es lo mismo que" o "es el mismo individuo que". Escribimos: "Napoleón es Bonaparte" como $n = b$ y "don Quijote es idéntico a Alonso Quijano" como $q = a$. "El ser palta es idéntico con el ser aguacate" se simboliza como $P = A$. "Si César es Napoleón yo (a) soy el rey de China" se escribe como $c = n > a = r$. Presuponemos que cualquier fórmula está encerrada entre corchetes (1.123); cuando es necesario desambiguar una fórmula que contiene una identidad, usaremos paréntesis para encerrar ésta; p. ej. $(v = m) = (m = v)$. Negamos la identidad así: $\sim(f = c)$, "esta fruta no es César", o bien podemos usar el signo "$\neq$": $f \neq c$.

* UNIDAD DE EJERCICIOS 18: TRADUCCIÓN

A. Traduzca al español estas expresiones, usando los símbolos de arriba (v: estrella vespertina, e: estrella matutina, c: Colón, f: esta fruta, P: plata, F: fruta, A: aguacate,

A1. $3 = 4 - 1$	A7. $n \neq e \ \& \ n \neq v$
A2. $m \neq c$	A8. $f \neq e > f \neq v$
A3. $P \neq F$	A9. $v = m <> m = v$
A4. $A = P$	A10. $(v = m) = (m = v)$
A5. $Pn = Ab$	A11. $\mathrm{U}x[P\mathrm{x} <> Ax]$
A6. $Pn <> Ab$	A12. $\mathrm{U}Y[Yn <> Yb]$

B. Traduzca a los símbolos:

B1. Este aguacate no es idéntico a esta fruta.
B2. El aguacate es idéntico a *avocado*.
B3. La estrella matutina es Venus.
B4. Napoleón es Bonaparte y Bonaparte es Napoleón.
B5. p es idéntico a p, y (además) p ssi p.
B6. *Don Quijote no es loco* es idéntico a *el hombre de la Mancha no es loco*.
B7. *Napoleón es idéntico a Bonaparte* es idéntico a *Bonaparte es idéntico a Napoleón*.
B8. *Napoleón es idéntico a Bonaparte* es equivalente a *Bonaparte es idéntico a Napoleón*.
B9. Si a es idéntico a b, entonces a es F ssi b es F.
B10. Si la estrella matutina es idéntica con la vespertina, entonces la matutina es brillante ssi lo es la vespertina.
B11. Si, para todo X, a es X ssi b es X, entonces a es idéntico a b.
B12. Si la estrella vespertina es todo lo que es la matutina, entonces son idénticas.

C. Compare estos pares de oraciones y diga si son V:

C1. Napoleón es Bonaparte / "Napoleón" es "Bonaparte".
C2. $Pn = Ab / Pn <> Ab$.
C3. $v = m <> \mathrm{m} = \mathrm{v}$ y $(v = m) = (m = v)$.

3.1.3 Existencia, números y descripciones

A principios del siglo XX se empeñaban por investigar la relación entre la lógica y las matemáticas. En la aritmética, es importante poder hablar de los números en términos lógicos. La proposición de que hay exactamente un rey de Francia la expresa la fórmula (Fx: x es rey de Francia):

$$\mathrm{E}x[Rx \ \& \ (y)[Ry > x = y]]$$

"Hay (al menos) una cosa x tal que x es rey de Francia y para cualquier cosa y, si y es rey de Francia, entonces es idéntica con x". La fórmula puede comprimirse en la equivalente:

$$\mathrm{E}x\mathrm{U}y[Ry <> x = y]$$

(la equivalencia se muestra en 3.2.2).

Otras expresiones numéricas son:

- Hay a lo más un rey de Francia: $UxUy[[Rx \& Ry] > x = y]$
- Hay al menos un rey de Francia: $ExRx$
- Hay dos reyes de Francia:

$$ExEy[Rx \& Ry \& x \neq y \& Uz[Rz > [x = z \vee y = z]]]$$

Se ha permitido (2.1.6) que se simbolice una descripción con un símbolo individual sencillo; "el rey de Francia" sería r. Whitehead y Russell hicieron un famoso análisis de las descripciones definidas en *Principia mathematica*. Introdujeron el símbolo ι para indicar "una sola cosa"; ιxRx indicaría "el rey de Francia", e. d., "la única cosa que es rey de Francia". Esta expresión se usa como definición de la fórmula de arriba para expresar "existe un solo rey de Francia":

$$E!\iota xRx =_{df} ExUy[Ry <> x = y]$$

"El rey de Francia es calvo" (Cr) se formaliza como $C\iota xRx$, expresión que es abreviatura de:

$$C\iota xRx =_{df} Ex[Uy[Ry <> x = y] \& Cx]$$

Se puede negar esta proposición de al menos dos maneras, pues puede significar que hay un rey de Francia que no es calvo o que no hay ningún rey de Francia, sea calvo o no. La posición de la tilde "~" en la fórmula determinará cuál es el sentido deseado de la negación.

Por otro lado, Cr es equivalente a $Ex[x = r \& Cx]$ y esta fórmula puede negarse como totalidad: $\sim Ex[x = r \& Cx]$, equivalente a $\sim Cr$ (pruebas en 3.2.2). En cambio, $Ex[x = r \& \sim Cx]$ quiere decir que hay un rey de Francia pero que no es calvo. Sin embargo, de la falsedad de la proposición de ser el rey calvo ($\sim Cr$) no se sigue que haya un rey que no sea calvo ($Ex[x = r \& \sim Cx]$).

La fórmula $Ex(x = r)$ se ha usado para expresar que existe algo que es idéntico al rey de Francia, o que existe éste, y la expresión se sigue de la identidad $r = r$:

1	$r = r$	**h**
2	$Ex(x = r)$	1 **ice**

En efecto, hay que suponer que una autoidentidad como $r = r$ implica la existencia de lo que el término denota.[48] La negación de $Ex(x = r)$ es $\sim Ex(x = r)$, equivalente a $Ux(x \neq r)$; evidentemente contradice $r = r$.

Quine usó la posibilidad de definir "el rey de Francia es Calvo" como $C\iota xRx$ para eliminar los nombre propios, desplazando así el compromiso ontólogico de los nombres a los cuantificadores. Sin embargo, no urge quitar este compromiso de los nombres por ser éstos eliminables, pues ¡los cuantificadores también son eliminables (en la lógica combinatoria)! Parece natural, si tomamos las debidas precauciones, admitir el compromiso tanto de los nombres y las descripciones como de los cuantificadores.

---

[48] D. P. Snyder, *Modal Logic and its Applications*, Nueva York, p. 266.

* UNIDAD DE EJERCICIOS 19: TRADUCCIÓN

A. Simbolice:

A1. Hay tres reyes de Francia.
A2. Hay al menos dos reyes de Francia.
A3. Hay a lo más tres reyes de Francia.
A4. No hay ningún rey de Francia.
A5. Dios hace todo menos a sí mismo.

B. Simbolice "el hombre es un enigma" cuando "el hombre" denota:

B1. Un hombre particular, digamos: Heráclito (h).
B2. El hombre como tal, en general.

C. De la negación de la descripción definida $Ex[Uy[Rx <> x = y] \& Cx]$ ("hay un rey de Francia calvo"), exprese los dos sentidos mencionados colocando la tilde en distintas partes de la expresión:

C1. Hay un rey de Francia pero no es calvo.
C2. No hay ningún rey de Francia, sea calvo o no.

3.1.4 Expresión de "es"

Existe una relación íntima entre la lógica y la ontología. Las expresiones "es", "está" y "hay" en español tienen muchos sentidos, algunos de los cuales saltan a la vista cuando intentamos formalizar las oraciones que contienen estos verbos. Aquí están algunos:

1. ser idéntico:

la estrella matutina **es** la estrella vespertina: $m = v$

Cervantes **es** el autor de *El Quijote*: $c = a$

2. tener una propiedad sencilla (pertenecer a un conjunto de miembros sencillos):

- don Quijote **es** loco: Lq
- don Quijote **es** un ser humano: Hq
- don Quijote **está** enfermo: Eq
- don Quijote **está** corriendo: Cq
- Cervantes **es** un autor: Ac
- el papa **es** calvo: $CtxPx$

3. tener una propiedad compleja, o sea, una relación (pertenecer a un conjunto cuyos miembros son pares, triples, etcétera):

- don Quijote **es** más alto que Sancho Panza: *Mds*
- 5 **es** mayor que 3: $5 > 3$
- Dulcinea **es** amada por don Quijote: *Aqd*

4. entrañar una propiedad a otra (estar un conjunto incluido en otro):

- todo manchego **es** loco: $\mathrm{U}x[Mx > Lx]$
- cada toro bravo **está** en el corral: $\mathrm{U}x[[Tx \,\&\, Rx] > Cx]$
- ningún caballo **es** elefante: $\mathrm{U}x[Cx > {\sim}\mathrm{E}x]$
- toda mujer **es** amada por algún hombre: $\mathrm{U}x[Mx > \mathrm{E}y[Hy \,\&\, Axy]]$

5. existir algo (al menos una cosa) que tiene una o más propiedades (pertenece a un conjunto o a varios):

- un caballo **es**: $\mathrm{E}xCx$
- **hay** un caballo: $\mathrm{E}xCx$
- algún ser humano **es** sabio: $\mathrm{E}x[Hx \,\&\, Sx]$
- **hay** un hombre sabio: $\mathrm{E}x[Hx \,\&\, Sx]$
- **hay** un número mayor que 3: $\mathrm{E}x(x > 3)$

6. existir algo (una sola cosa) que tiene una o más propiedades (conjuntos), indicado por una descripción:

- **hay** un rey de Francia: $\mathrm{E}!\iota xRx$
- Dios **existe**: $\mathrm{E}!\iota xDx$ (donde D es la conjunción de atributos divinos)

7. existir algo (una sola cosa) denotado por un nombre (deducible de la identidad en que el nombre es idéntico consigo mismo):

- **existe** Popocatépetl: $\mathrm{E}x(x = p)$, deducible de $p = p$
- **hay** justicia: $\mathrm{E}x(x = j)$
- Dios **es**: $\mathrm{E}x(x = d)$

8. tener una propiedad (conjunto) cierto número de cosas a que conviene:

- **Hay** a lo más dos reyes de Francia:
  $\mathrm{U}x[Rx > \mathrm{U}y[Ry > x = y]] \vee \mathrm{U}y\mathrm{U}z[[Ry \,\&\, Rz] > [x = y \,\&\, x = z \,\&\, x \neq y]]$

9. existir en algún espacio de tiempo (7.):

- **existió** el autor del *Quijote*: $\mathrm{PE}x(Ax \,\&\, \mathrm{U}y[Ax > x = y]]$
- **hubo** un autor del *Quijote*: $\mathrm{PE}xAx$
- **existe** El Escorial pero **no existió** (hubo un tiempo en que no existió): $\mathrm{E}x(x = e) \,\&\, P{\sim}\mathrm{E}x(x = e)$
- **habrá** perros sarnientos: $\mathrm{FE}x[Px \,\&\, Sx]$

Los escolásticos hablaban de dos sentidos del verbo "ser/estar (*esse*)": "de tercer adyacente", cuando hay una predicación ("Sócrates es mortal") y "de segundo adyacente", cuando se afirma la existencia de algo ("Sócrates es").

Cuando decimos que "hay" o "existe" un número, la justicia, Popocatépetl o Dios, o cuando hacemos que los cuantificadores se extiendan sobre estas cosas tan diversas, evidentemente se trata de distintos tipos de "existencia". El compromiso ontológico está en juego no sólo en el discurso ordinario sino en el simbólico. Prácticamente podemos simplificar los problemas semánticos restringiendo el universo del discurso, diciendo, p. ej., que se habla sólo de los números.

3.2 Axioma y regla de la identidad

3.2.1 Axioma de la identidad

Presumiblemente todo es idéntico consigo mismo, y tomamos esta presunción como axioma del sistema. Si la misma cosa puede tener uno o más nombres, también puede tener, por así decirlo, el mismo nombre dos veces. Podemos decir que Napoleón, p. ej., es idéntico a Napoleón ($n = n$), 7 a 7 ($7 = 7$), la proposición de "Llueve" con sí misma ($L = L$), etc. Llamamos a tales proposiciones autoidénticas (3.4.1).

Ya que toda autoidentidad tiene que ser V, podemos introducir una proposición de la forma $u = u$ como paso en cualquier prueba formal. El símbolo que reemplaza a u debe ser admisible como "existente" en el universo del discurso; pues si se expresa la existencia de a con $\mathrm{E}x(x = a)$, esta fórmula puede derivarse de $a = a$ mediante **ice** (3.1.3).

Justificaremos la introducción de autoidentidades con el *axioma de la identidad*, abreviado como "**ai**". Es una "regla" en un sentido especial, porque la identidad que **ai** justifica no se remite a ningún paso o pasos anteriores de la prueba (si los hay) de donde se deduzca como consecuencia directa. Por lo tanto la justificación tampoco tiene referencia numérica (en esto **ai** es parecido a la semirregla **h**).

ai: *axioma de la (introducción de la) identidad*

$v = v$	**ai**

Aquí v hace las veces de cualquier símbolo permitido, sea proposicional o predicativo.

Un ejemplo de una prueba que incorpora **ai** (n: Napoleón, E: ser un ente):

1	$n = n > \mathrm{E}n$	**h**
2	$n = n$	**ai**
3	$\mathrm{E}n$	1, 2 **mp**
4	$[n = n > \mathrm{E}n] > \mathrm{E}n$	1-3 **ii**

Si la autoidentidad de Napoleón implica que éste es un ente, entonces es un ente. La siguiente prueba significa: si lo que Dios hace no es idéntico a Dios (o sea que nada de lo que hace Dios es idéntico a Dios), entonces Dios no se hace a sí mismo:

1	$\mathrm{U}y[Hdy > d \neq y]$	**h**
2	$Hdd > d \neq d$	1 **ecu** *d/y*
3	$d = d$	**ai**
4	$\sim Hdd$	2, 3 **mt**
5	$\mathrm{U}y[Hdy > d \neq y] > \sim Hdd$	1-4 **ii**

Otro ejemplo (*n*: Napoleón):

1	$\mathrm{U}x[d \neq x > Hdx]\ \&\ d \neq n$	**h**
2	$\mathrm{U}x[d \neq x > Hdx]$	1 **ec**
3	$d \neq n$	1 **ec**
4	$d \neq n > Hdn$	2 **ecu** *n/x*
5	Hdn	3, 4 **mp**
6	$[\mathrm{U}x[d \neq x > Hdx]\ \&\ d \neq n] > Hdn$	1-5 **ii**

* UNIDAD DE EJERCICIOS 20: EL AXIOMA DE LA IDENTIDAD **ai**

A. Traduzca y pruebe:

A1. Si Dios hace todo lo que no es Dios y (si) Dios no es autoidéntico, entonces Dios se hace a sí mismo.
A2. Algo es autoidéntico (algo es idéntico consigo mismo).
A3. Todo es autoidéntico (todo es idéntico consigo mismo).
A4. Algo es idéntico a algo.
A5. Si el hecho de ser dos más dos cuatro es idéntico a el hecho de ser dos más dos cuatro, entonces dos más dos son cuatro.

B. Pruebe:

B1. $[a = a > \mathrm{U}xFx] > Fb$
B2. $[\mathrm{U}xFx > b \neq b] > \mathrm{E}x{\sim}Fx$
B3. $a = a$
B4. $[\mathrm{E}x\mathrm{E}y(x = y) > Ga] > \mathrm{E}zGz$
B5. $\mathrm{E}x(x \neq x) > p$

3.2.2 La regla de la eliminación de la identidad

El principio que dice que si "dos" cosas son idénticas —lo que decimos de la una podemos decir de la otra— se llama la "indiscernibilidad de los idénticos" (o de lo idéntico) o la "ley de Leibniz", y era conocida en la escolástica (3.4.2). También se llama regla de la "sustitutividad", pues podemos sustituir una expresión por la otra; la llamaremos: "eliminación de la identidad":

ei: *eliminación de la identidad*

1	$u = v$	
2	ϕu	
3	ϕv	1, 2 **ei**

Aquí u y v hacen las veces de cualquier símbolo permitido en el sistema. La justificación incluye una referencia numérica a dos pasos previos: *1*) la identidad básica de la regla y *2*) la proposición en la que se hace la sustitución. Un ejemplo (m: la estrella matutina, v la estrella vespertina, L: se levanta en la mañana):

1	$m = v$	**h**
2	Lm	**h**
3	Lv	1, 2 **ei**

Si la estrella matutina es la misma que la vespertina (las dos son Venus) y la matutina se levanta en la mañana, entonces la vespertina se levanta en la mañana.

Cuando la proposición en la que se hace la sustitución es ella misma una identidad, puede confundirse con la identidad básica. Para evitar esta confusión, ayuda conectar con una línea la misma letra en las dos proposiciones sobre las que la regla opera y entonces poner una flecha para indicar el sentido de la sustitución. Primero veamos este procedimiento en una prueba con una sola identidad:

1	$n = b$	**h**
	↳ ↓	
2	Pn	**h**
3	Pb	1, 2 **ei**

En la siguiente prueba la regla **ei** opera en dos identidades. Demuestra, en efecto, el principio de la transitividad de la identidad:

1	$a = b$	**h**
	↓ ↱	
2	$b = c$	**h**
3	$a = c$	1, 2 **ei**

Aquí el paso 1 es la identidad básica y el 2, la proposición (ella misma es una identidad) en que se hace la sustitución.

La equivalencia de las dos versiones de "hay exactamente un rey de Francia" (3.1.3) se demuestra así:

1	$Ex[Rx \,\&\, Uy[Ry > x = y]]$	**h**
2	$x \mid Rx \,\&\, Uy[Ry > x = y]$	**h**
3	Rx	2 **ec**
4	$Uy[Ry <> x = y]$	2 **ec**
5	$y \mid Ry$	**h**
7	$Uy[Ry <> x = y]$	4 **i**
8	$Ry <> x = y$	7 **ecu**
9	$x = y$	5, 8 **eci**
10	$x = y$	**h**
11	Rx	3 **i**
12	Ry	10, 11 **ei**
13	$Ry <> x = y$	5-9, 10-12 **ici**
14	$Uy[Ry <> x = y]$	5-12 **icu**
15	$ExUy[Ry <> x = y]$	14 **ice**
16	$ExUy[Ry <> x = y]$	1, 2-15 **ece**
17	$ExUy[Ry <> x = y]$	**h**
18	$x \mid Uy[Ry <> x = y]$	**h**
19	$Rx <> x = x$	18 **ecu** *x/y*
20	$x = x$	**ai**
21	Rx	19, 20 **eci**
22	$y \mid Ry$	**h**
23	$Uy[Ry <> x = y]$	18 **i**
24	$Ry <> x = y$	23 **ecu**
25	$x = y$	22, 24 **eci**
26	$Ry > x = y$	22-25 **ii**
27	$Uy[Ry > x = y]$	22-26 **icu**
28	$Rx \,\&\, Uy[Ry > x = y]]$	21,27 **ic**
29	$Ex[Rx \,\&\, Uy[Ry > x = y]]$	28 **ice**
30	$Ex[Rx \,\&\, Uy[Ry > x = y]]$	17, 18-29 **ece**
31	$Ex[Rx \,\&\, Uy[Ry > x = y]] <> ExUy[Ry <> x = y]$	1-5, 6-13 **ici**

La afirmación de 3.1.3 de que Cr y $Ex[x = r \,\&\, Cx]$ son equivalentes se muestra así:

1	Cr	**h**
2	$r = r$	**ai**
3	$r = r \,\&\, Cr$	1, 2 **ic**
4	$Ex[x = r \,\&\, Cx]$	3 **ice** x/r
5	$Ex[x = r \,\&\, Cx]$	**h**
6	$x \quad x = r \,\&\, Cx$	**h**
7	$x = r$	2 **ec**
8	Cx	2 **ec**
9	Cr	7, 8 **ei**
10	Cr	5, 6-9 **ece**
11	$Cr \leftrightarrow Ex[x = r \,\&\, Cr]$	**ici** 1-4, 5-10

La equivalencia de sus negaciones:

1	$\sim Cr$	**h**
2	$c \quad Ex[x = r \,\&\, Cx]$	**h**
3	$x \quad x = r \,\&\, Cx$	**h**
4	$x = r$	3 **ec**
5	Cx	3 **ec**
6	Cr	4, 5 **ei**
7	$\sim Cr$	1 **i**
8	$\sim Ex[x = r \,\&\, Cx]$	6, 7 **eng**
9	$\sim Ex[x = r \,\&\, Cx]$	1, 3-8 **ece**
10	$\sim Ex[x = r \,\&\, Cx]$	2-9 **ing**
11	$\sim Ex[x = r \,\&\, Cx]$	2-9 **ing**
12	$Ux\sim[x = r \,\&\, Cx]$	11 **sh**
13	$\sim[r = r \,\&\, Cr]$	12 **ecu** r/x
14	$r \neq r \vee \sim Cr$	
15	$r \neq r$	**h**
16	$r = r$	**ai**
17	$\sim Cr$	15, 16 **eng**
18	$\sim Cr$	**h**
19		
20	$\sim Cr$	18 **r**
21	$\sim Cr$	14, 15-17,18-20 **ed**
22	$\sim Cr \leftrightarrow \sim Ex[x = r \,\&\, Cx]$	1-10, 11-21 **ici**

He aquí la demostración de la implicación mencionada en 3.1.3 de que si hay un rey pero no es calvo, entonces es F que el rey sea calvo ($Ex[x = r \& \sim Cx] > \sim Cr$):

1		$Ex[x = r \& \sim Cx]$	**h**
2	x	$x = r \& \sim Cx$	**h**
3		$x = r$	4 **ec**
4		$\sim Cx$	4 **ec**
5		$\sim Cr$	5, 6 **ei**
6		$\sim Cr$	3, 4-7 **ece**

* UNIDAD DE EJERCICIOS 21: LA REGLA **ei**

A. Traduzca y resuelva:

A1. Bolívar es idéntico a el libertador ssi el libertador es idéntico a Bolívar.
A2. Si César no es idéntico a Bruto, entonces Bruto tampoco es idéntico a César.
A3. Si Cervantes es el autor de *El Quijote*, entonces si el autor de *El Quijote* no es tonto, tampoco lo es Cervantes.
A4. Si Camus es autor de *Los Justos*, entonces lo que es Camus, también lo es el autor de *Los Justos* (e. d., cualquier propiedad que tiene Camus, la tiene también el autor de *Los Justos*).
A5. Si Dulcinea es maja, entonces es idéntica a sí misma.

B. Resuelva:

B1. $p <> p$
B2. $p = p$
B3. $[F = G \& a = b] > Fa = Gb$
B4. $G = H > Ux[Gx <> Hx]$
B5. $\sim Ex[x = r \& \sim Cr] > Cx$

C. Explique lo que significan las oraciones B1 y B2 de arriba y cómo difieren en sentido.

3.3 Abstractores

En ciertos contextos es útil referirse a las propiedades con la ayuda de *abstractores*.[49] Puede decirse que una proposición atribuye una propiedad a una cosa que contiene. P. ej., la proposición de que Dulcinea es manchega (*Md*) atribuye a Dulcinea la propiedad de *ser manchega*. Y la proposición de que Dulcinea da Rocinante a don Quijote (*Ddqr*) atribuye:

[49] Fitch, p. 93 y ss.

- a Dulcinea la propiedad de *dar Rocinante a don Quijote*
- a don Quijote la propiedad de *recibir Rocinante de (dado por) Dulcinea*
- a Rocinante la propiedad de *ser dado por Dulcinea a don Quijote*

Sería más preciso decir que el *resto* de la proposición atribuye una propiedad a una cosa que contiene. En *Md*, la parte de la proposición "*M*..." atribuye la propiedad de ser manchega a Dulcinea. Podemos indicar este "hueco" con una letra variable (*x*, *y*, *z*); la propiedad atribuida a Dulcinea en *Md* es "*Mx*". Aislamos y generalizamos estas propiedades de la siguiente manera:

- *Mx*
- *Dxqr*
- *Ddxr*
- *Ddqx*

Para formar el abstractor, prefijamos la *x* seguida por la línea diagonal "\" para marcar el hueco y encerramos el conjunto con claves "{ }":

- $\{x\backslash Mx\}$
- $\{x\backslash Dxqr\}$
- $\{x\backslash Ddxr\}$
- $\{x\backslash Ddqx\}$

Ya que los abstractores indican las propiedades, podemos usarlos como predicados:

- $\{x\backslash Mx\}q$: don Quijote es manchego
- $\{y\backslash My\}r$: Rocinante es manchego
- $\{x\backslash Dxqr\}s$: Sancho Panza da Rocinante a don Quijote
- $\{x\backslash Ddxr\}d$: Dulcinea se da Rocinante a sí misma
- $\{z\backslash Ddqz\}m$: Dulcinea da el yelmo de Mambrino a don Quijote
- $\{x\backslash Ddqx\}r$: Dulcinea da Rocinante a don Quijote

También la variable puede repetirse en el abstractor; $\{x\backslash Axx\}$ es la propiedad de amarse a sí mismo y $\{x\backslash Axx\}n$ expresará la proposición de que Napoleón se ama a sí mismo. Entonces, la propiedad de la autoidentidad, *I* (2.3.9), correspondería a $\{x\backslash x = x\}$ y $\{x\backslash x = x\}H$ expresa la proposición de que el conjunto o la propiedad *humano* es idéntica a sí misma. Podríamos definir *I* como $\{x\backslash x = x\}$ de tal manera que las fórmulas *IH* y $\{x\backslash x = x\}H$ serían equivalentes.

Asimismo, la propiedad de *no tenerse a sí misma como propiedad* (o el conjunto de los conjuntos que no se pertenecen a sí mismos), *K*, sería $\{X\backslash{\sim}XX\}$. En este caso *K* puede verse como definición de $\{X\backslash{\sim}XX\}$, y $\{X\backslash{\sim}XX\}H$ significa que la clase de los hombres (*H*) pertenece a la clase de las clases que no son miembros de sí mismas (*KH*). Se indicará que la clase de las cosas autoidénticas no pertenece a la clase de las clases que no son miembros de sí mismas con la fórmula ${\sim}\{X\backslash{\sim}XX\}\{x\backslash x = x\}$ (${\sim}KI$).

También podemos sacar más de un símbolo individual y, en este caso, el abstractor indica una relación. P. ej., $\{xy\backslash Axy\}$ indica la relación de *amar x* a *y* (*Axy*) y $\{xy\backslash Dxyr\}$ indica la relación de *dar x Rocinante a y*. La fórmula $\{xy\backslash Axy\}nj$ (j: Josefina) expresa que Napoleón ama a Josefina y $\{xy\backslash Dxyr\}sq$ que Sancho Panza da Rocinante a don Quijote. $\{xyz\backslash Dxyz\}$ representaría simplemente la relación de *dar*.

Evidentemente, la propiedad puede ser simbolizada por el abstractor o el predicado ordinario; el *ser manchego* puede expresarse como $\{y\backslash My\}$ o como $M\ (Mx)$ y las dos fórmulas Ms y $\{y\backslash My\}s$ significan que Sancho Panza es manchego. Se nota que la constante s en Ms se inserta en el hueco de $\{y\backslash My\}s$ marcado por la variable y. Tenemos, pues, una equivalencia y permitimos que se introduzca y se elimine un abstractor mediante las reglas **iab** y **eab**, "introducción y eliminación del abstractor":

1	Md	**h**
2	$\{z\backslash Mz\}d$	1 **iab**

1	$\{z\backslash Mz\}d$	**h**
2	Md	1 **eab**

Otros ejemplos:

1	$Ddqr$	**h**
2	$\{x\backslash Dxqr\}d$	1 **iab**
3	$\{y\backslash Ddyr\}q$	1 **iab**
4	$\{x\backslash Ddqx\}r$	1 **iab**

1	$\{y\backslash Ddqy\}r$	**h**
2	$Ddqr$	1 **eab**

La propiedad de ser idéntico al autor de *El Quijote* es representable como $\{x\backslash x = a\}$ y "$\{x\backslash x = a\}c$" expresaría que Cervantes es (idéntico a) el autor de *El Quijote*.

1	$\{x\backslash x = a\}c$	**h**
2	$c = a$	1 **eab**

Y en cuanto a la autoidentidad tenemos:

1	$\{x\backslash x = x\}q$	**h**
2	$q = q$	1 **eab**

Veamos un caso de un predicado cuantificado; el predicado introducido por **ecu** indica la propiedad de ser idéntica a don Quijote, $\{x\backslash x = q\}$:

1	$UX[Xq > Xa]$	**h**
2	$\{x\backslash x = q\}q > \{x\backslash x = q\}a$	1 **ecu** $\{x\backslash x = q\}/X$
3	$q = q$	**ai**
4	$\{x\backslash x = q\}q$	3 **iab**
5	$\{x\backslash x = q\}a$	2, 4 **mp**
6	$a = q$	5 **eab**

La prueba demuestra que si Alonso Quijano tiene las propiedades de don Quijote, entonces Alonso Quijano es idéntico a don Quijote (3.2.2). La siguiente muestra que si don Quijote se ama a sí mismo, entonces algo lo ama (paso 2) y tiene la propiedad de ser amado por algo.

1	Aqq	**h**
2	$ExAxq$	1 **ice** x/q
3	$\{z\backslash ExAxz\}q$	2 **iab**

La clase de los seres humanos, H, no pertenece a la clase de las clases que no son miembros de sí mismas ($\sim KI$); podemos introducir y eliminar el abstractor así:

1	$\{X\backslash \sim XX\}H$	**h**
2	$\sim HH$	1 **eab**
3	$\{X\backslash \sim XX\}H$	2 **iab**

* UNIDAD DE EJERCICIOS 22: ABSTRACTORES

A. Traduzca (M: manchego, A: amar, P: persona):

A1. $\{y\backslash Ayd\}s$
A2. $\{x\backslash d \neq x\}q$
A3. $\{z\backslash z = z\}d$
A4. $Ux(x = x) > EXUxXx$
A5. $\{z\backslash Ux[Px > Azx]\}s$

B. Traduzca, usando abstractores:

B1. Dulcinea es maja (tiene la propiedad de ser maja).
B2. Don Quijote ama a Dulcinea (Quijote tiene la propiedad de amar a Dulcinea).
B3. Don Quijote ama a Dulcinea (Dulcinea tiene la propiedad de ser amada por don Quijote).

B4. Si todo es autoidéntico, lo es también mi abuela (si todo tiene la propiedad de ser idéntico a sí mismo, entonces mi abuela tiene la de ser idéntica a sí misma).
B5. Dulcinea no es Sancho Panza pero Sancho Panza es Sancho Panza (Dulcinea no tiene la propiedad de ser idéntica a Sancho Panza, pero sí la tiene Sancho Panza).

C. Resuelva:

C1. $Fa <> \{x\backslash Fx\}a$
C2. $Rab > \{y\backslash Ryb\}a \ \& \ \{y\backslash Ray\}b$
C3. $UZZa <> \{x\backslash UZZx\}a$
C4. $[a = b \ \& \ Fa] > \{z\backslash Fz\}b$
C5. $UyEXXy$ (use **ai** y **iab**)

3.4 Cuestiones de la identidad

La evolución de la lógica simbólica ha incluido interesantes discusiones en torno a la identidad. Mencionamos arriba su aplicación en las matemáticas (3.1.3). Comentamos ahora, con la ayuda de los abstractores, la autoidentidad y la ley de Leibniz.

3.4.1 La autoidentidad

La solución que propuso Russell a su paradoja es problemática porque excluye toda autorreferencia (2.3.9). La siguiente prueba muestra un uso inocente de la autoidentidad: la clase de las cosas autoidénticas, $\{x\backslash x = x\}(I)$, por ser idéntica consigo misma, pertenece a la clase de las cosas autoidénticas, y por ende que $\{x\backslash x = x\}$ no pertenece a la clase de las clases que no son miembros de sí mismas, $\{X\backslash{\sim}XX\}$ (K). Observe que la prueba es categórica; es teorema del sistema que la autoidentidad no pertenece a la clase K. Para facilitar la lectura, se han colocado las abreviaturas I y K a la derecha.

1	$\{x\backslash x = x\}=\{x\backslash x = x\}$	**ai**	$I = I$
2	$\{x\backslash x = x\}\{x\backslash x = x\}$	1 **iab**	$\{x\backslash x = x\}I$ (II)
3	$\{X\backslash{\sim}XX\}\{x\backslash x = x\}$	**h**	$\{X\backslash{\sim}XX\}I$ (KI)
	├		
4	$\quad {\sim}\{x\backslash x = x\}\{x\backslash x = x\}$	3 **eab**	${\sim}II$
5	$\quad \{x\backslash x = x\}\{x\backslash x = x\}$	2 **i**	II
6	${\sim}\{X\backslash{\sim}XX\}\{x\backslash x = x\}$	3-5 **ing**	${\sim}KI$

El segundo paso dice que la autoidentidad pertenece a la clase de las cosas autoidénticas y el sexto que la autoidentidad no pertenece a la clase de las clases que no son miembros de sí mismas.

3.4.2 Identidad e indiscernibilidad

Según la ley de la indiscernibilidad de los idénticos de Leibniz, lo que decimos de una de dos cosas idénticas, lo podemos decir de la otra, o sea, que tienen las mismas propiedades (3.2.2):

$$UxUy[x = y > UZ[Zx <> Zy]]$$

El principio se encuentra en Aristóteles y los escolásticos; Santo Tomás de Aquino, p. ej., lo expresa así: "...cosas que (*quaecumque*) son idénticas se relacionan de tal manera que todo lo que se predica de la una se predica de la otra".

Aquí está la demostración; simplificamos la prueba usando las constantes singulares *a* y *b* para evitar la cuantificación:

1	$a = b$	**h**
2	Z Za	**h**
3	$a = b$	1 **i**
4	Zb	2, 3 **ei**
5	Zb	**h**
6	$a = b$	1 **i**
7	Za	2, 3 **ei**
8	$Za <> Zb$	2-4, 5-7 **ici**
9	$UZ[Za <> Zb]$	2-8 **icu**
10	$a = b > UZ[Za <> Zb]$	1-9 **ii**

La conclusión puede leerse: si *a* es idéntico a *b*, entonces para cualquier propiedad *Z*: a tiene *Z* ssi *b* tiene *Z*, o (en términos de conjuntos): ...entonces para cualquier conjunto *Z*: *a* pertenece a *Z* ssi *b* pertenece a *Z*).

También puede demostrarse en nuestro sistema el principio contrario, la ley de la identidad de los indiscernibles (de lo indiscernible):

1	$UZ[Za <> Zb]$	**h**
2	$\{x \backslash x = a\}a > \{x \backslash x = a\}b$	1 **ecu** $\{x \backslash x = a\}/X$
3	$a = a$	**ai**
4	$\{x \backslash x = a\}a$	3 **iab**
5	$\{x \backslash x = a\}b$	2, 4 **mp**
6	$a = b$	5 **eab**
7	$UZ[Za <> Zb] > a = b$	1-6 **ii**

La conclusión puede leerse: si a tiene la propiedad Z si y sólo si b tiene Z, entonces a es idéntico a b. Note que el predicado que reemplaza Z en el paso 2 mediante la regla **ecu** es $\{x \backslash x = a\}$, abstractor que indica la propiedad de ser idéntico a a.

Hay, pues, una coimplicación que combina los dos principios:

$$UxUy[x = y <> UZ[Zx <> Zy]]$$

Pero el hecho de que esta equivalencia valga según ciertas operaciones sintácticas no significa que ella o una de sus implicaciones no pueda someterse a la crítica filosófica. Por ejemplo, algunos lógicos han preferido limitar el alcance de la ley de Leibniz o la han rechazado, ajustando la sintaxis de acuerdo con sus intuiciones filosóficas. Examinaremos otros problemas en torno a la identidad en el contexto de la lógica modal y epistémica (12.2.4, 14.3.4).

* UNIDAD DE EJERCICIOS 23: UNIVERSALIDAD DE **ei**

A. Demuestre que:

A1. Todo es autoidéntico: $Ux\{z \backslash z = z\}x$.
A2. Todo lo que no es idéntico a b no tiene la propiedad de ser idéntico a b: $Ux[x \neq b > \sim\{y \backslash y = b\}x]$.
A3. si la clase de los hombres (H) no es un hombre, entonces H pertenece a la clase de las clases que no son miembros de sí mismas: $\sim HH > KH$ (se permite, por $\mathbf{r}_{\mathbf{df}}$ la sustitución dentro de cualquier fórmula de K por $\{X \backslash \sim XX\}$ y al revés).

B. Demuestre la equivalencia que relaciona la identidad y la indiscernibilidad usando la plena cuantificación:

$$UxUy[x = y <> UZ[Zx <> Zy]]$$

3.5 Lógica libre

K. Lambert y otros han elaborado una lógica libre que ya ha encontrado aplicación en la filosofía (14.622).[50] Los nombres propios (o abreviaturas de una descripción) no conllevan necesariamente la existencia de los objetos que denotarían. Hay que afirmar la existencia en una premisa especial, expresada generalmente como identidad, p. ej., $Ex(x = r)$, "el rey de Francia existe" (3.1.3). Si se quiere decir que el rey es calvo y que existe, pues, hay que escribir Cr & $Ex(x = r)$.

Por consiguiente, en la lógica libre las reglas **ice** y **ecu** ya no ligan sin más las fórmulas que tienen la cuantificación con las que no la tienen (2.3.2). Por lo tanto, no podemos hacer lo siguiente (*Aq*: don Quijote arremete contra los molinos de viento):

[50] "Existential import revisited", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 4 (1963): 288-292; importantes en el desarrollo de la lógica libre son H. S. Lonard y J. Hintika; referencia en Ed. K. Lambert, *Philosophical Applications of Free Logic*, Oxford, 1991, p. 13, nota 1).

1	Aq	**h**
2	$\mathrm{E}xAx$	1 **ice**

porque el uso de q en esta lógica no garantiza que corresponda a algo existente. Por lo mismo tampoco podemos hacer esto (Bq: don Quijote es bueno):

1	$\mathrm{U}xBx$	**h**
2	Bq	1 **ecu**

Para que valgan estas reglas en la lógica libre hay que agregar una premisa existencial adicional a la regla de la siguiente manera:

1	ϕv	**h**
2	$\mathrm{E}u(u = v)$	**h**
3	$\mathrm{E}u\phi u$	1, 2 **ice** u/v (lógica libre)

1	$(\mathrm{U}u)\phi u$	**h**
2	$\mathrm{E}u(u = v)$	**h**
3	ϕv	1, 2 **ecu** v/u (lógica libre)

Las pruebas de arriba serían:

1	Aq	**h**
2	$\mathrm{E}x(x = q)$	**h**
3	$\mathrm{E}xAx$	1, 2 **ice** (lógica libre)

1	$\mathrm{U}xBx$	**h**
2	$\mathrm{E}x(x = q)$	**h**
3	Bq	1, 2 **ecu** (lógica libre)

donde la segunda premisa dice (erróneamente) que don Quijote existe.

En la lógica usual, no es necesario limitar las reglas **ice** y **ecu** de esta manera, si se presupone que los términos individuales tienen compromiso existencial con referencia a algún universo del discurso. En la lógica modal la existencia se refiere a los contextos modales.

II Parte

EXTENSIONES DE LA LÓGICA

Capítulo 4

LÓGICA MODAL

4.0 Ubicación

Presentamos a continuación la sintaxis, e. d., el uso de las reglas, de la lógica modal e indicamos unos conceptos básicos necesarios para entender su sentido.[51] Exploraremos el sentido filosófico de la modalidad en la parte semántica de los mundos posibles (8.13). En este capítulo (4), incluímos muchas de las pruebas que discutiremos en el contexto semántico y hacemos preguntas "para pensar" que atañen a cuestiones que se tratarán posteriormente.

4.1 Modalidad

4.1.1 Tipos de proposiciones

Las proposiciones de que hemos hablado hasta ahora son *asertóricas*: no son modificadas por operadores modales (ni por otros tipos de operadores, como los epistémicos, deónticos, temporales, etc.). En la lógica elemental clásica (el cálculo funcional con la identidad), se afirma que las proposiciones son V o F "a secas". En la *modal* decimos que son *necesaria* y *posiblemente* V o F y las fórmulas son modificadas por operadores que expresan necesidad y posibilidad. Existen, a propósito, otros desarrollos de la lógica elemental que no son modales, como la lógica de las relaciones.

Se trata, pues, de varios tipos de modalidad, los cuales llamaremos simplemente *modos*:

- posibilidad
- imposibilidad

- necesidad
- innecesidad

[51] Seguiremos a grandes rasgos la deducción natural de B.F. Fitch aplicada a T y S4 (secciones 11-13 y 23). El método de distinguir entre los sistemas modales mediante el cuadro de oposición escolaático es original.

- contingencia
- incontingencia

Los operadores que indican los modos son:

- es posible que
- es imposible (no es posible) que

- es necesario que
- es innecesario (no es necesario) que

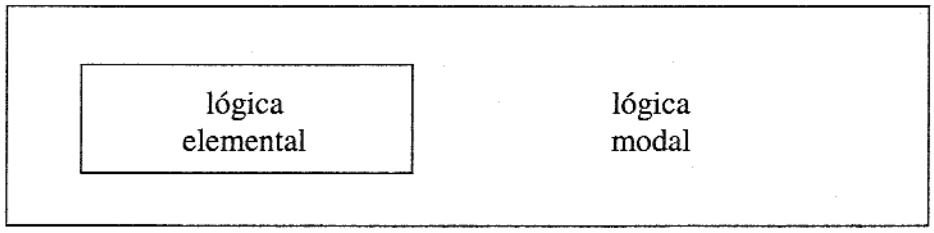
- es contingente que
- es incontingente (no es contingente) que

Cuando los operadores modales se interpretan como modos, la lógica (y la clase de modalidad) se llama *alética*. Por lo tanto, el tema de esta sección es la sintaxis modal alética.

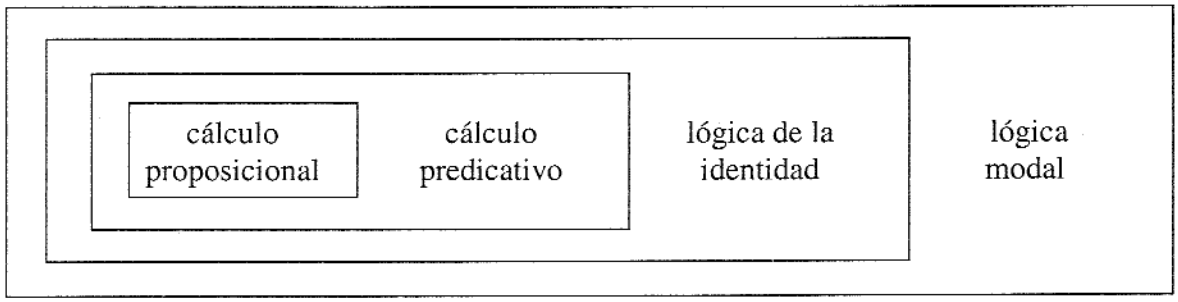
Daremos cuatro reglas que gobiernan la deducción de ciertos tipos de proposiciones, de otros, cuando los operadores modales desempeñan un papel inferencial.

4.1.2 Lógica elemental y modal

La lógica de la identidad incluye al cálculo funcional y la de los predicados, a la de las proposiciones (ver la introducción). De la misma manera, la lógica modal presupone e incluye *toda* la elemental. E. d., la lógica modal incorpora todos los operadores y todas las reglas del cálculo funcional con la identidad y es una expansión de la lógica elemental:



Aquí está un esquema más completo, el cual incluye los componentes de la lógica elemental:



Veremos (12.2.1) que son *necesarias* todas las proposiciones que podemos derivar en la lógica elemental. Es decir, toda proposición que tiene la forma lógica de una fórmula que aparece en el secuente principal de una prueba categórica (como $p > [q > p]$) es necesaria.

4.1.3 Interpretaciones

Vistos sólo sintácticamente, como integrantes de un sistema formal, los operadores modales carecen de significado fuera del que coincide con su función sintáctica. La palabra "modal" en el sentido alético, pues, realmente no es aplicable a los operadores si a éstos no se los interpreta como "posible" y "necesario". También podríamos tomar la lógica elemental sin interpretar sus símbolos, e. d., sin atribuirles significados que corresponden a "y", "si", "todo", etcétera.

En efecto, los operadores modales pueden recibir otras interpretaciones. P. ej., el que corresponde a "es necesario que" puede recibir el sentido "Fulano sabe que" o "es moralmente obligatorio que" o inclusive: "siempre ha sido el caso que". En estos casos hablamos de la lógica epistémica (la lógica del saber y del creer), de la lógica deóntica (de la ética) y de la lógica temporal (del tiempo). Explicaremos la sintaxis de estos sistemas en la sección 5.

Los operadores modales se agrupan en pares: uno fuerte y el otro débil. El alético fuerte es "necesario" y el débil, "posible"; el operador deóntico fuerte es "obligatorio" y el débil, "lícito". Son interdefinibles lógicamente con la ayuda de la negación: "no es necesario que Dulcinea sea manchega" y "es obligatorio que don Quijote no pegue a Sancho Panza" equivalen, respectivamente, a: "es posible que Dulcinea no sea manchega" y "no es lícito que don Quijote pegue a Sancho Panza". Por ser interdefinibles, los sistemas podrían desarrollarse con un solo operador: fuerte o el débil. Incorporaremos los dos en nuestros sistemas porque generalmente los pares forman parte del discurso filosófico.

Existe un paralelismo formal ("puro") entre estos pares de operadores modales y los cuantificadores, pues el cuantificador universal es fuerte en comparación con el existencial, el cual es débil (2.2.1). Los escolásticos notaron un paralelismo entre "todo" y la necesidad y entre "alguno" y la posibilidad (9.2.0).

Es evidente que varios contenidos pueden funcionar lógicamente de la misma manera. Es mejor, pues, no decir que las lógicas epistémicas, deónticas y temporales sean "extensiones" ni "aplicaciones" de la lógica modal alética, porque todas pueden ser interpretaciones paralelas de los mismos sistemas formales. Sin embargo, todas estas lógicas son extensiones de la elemental en el sentido de que incluyen a ésta. Desde luego que las lógicas pueden combinarse en la misma proposición, como en "es posible que Fulano supiera que tendría que devolver el dinero".

Hay, pues, dos sentidos de "modal": uno general y "puro" (las expansiones carentes de interpretación adicional de la lógica elemental) y otro específico (las expansiones con interpretación alética: los modos de la necesidad y posibilidad).

4.1.4 Sistemas de lógica modal

Hemos visto que se han sugerido varias opciones a la lógica elemental clásica (ver la introducción). Asimismo, hay varios sistemas de la modal. Pero mientras que las lógicas asertóricas son a veces fundamentalmente antagónicas, los sistemas modales se distinguen según su poder relativo, e. d., según el tipo de inferencias que permiten. Muchas veces se incluyen el uno en el otro. Así son los tres que estudiaremos detalladamente, T, S4 y S5: S5 presupone S4 y S4 presupone T. Generalmente el sistema S5 se considera como fundamental en varios sentidos; veremos el porqué cuando hablamos de la semántica de los mundos posibles (13.1).

En nuestro sistema de deducción natural, la diferencia entre estos tres sistemas modales será determinada por el tipo de iteración permitida en las subpruebas modales o "estrictas". Indicaremos los varios tipos de la iteración con la ayuda del cuadro de oposición modal escolástico (1.1.5, 1.12, 4.1.8).

4.1.5 Sentido de los operadores modales

La posibilidad y la necesidad son los modos básicos, fuerte y débil, respectivamente. Pero como son interdefinibles (4.1.7), podríamos decir que parece haber una serie —según el sistema— de modalidades "profundas". En la parte sobre los mundos posibles precisaremos más el sentido de los modos (8.4.1).

4.1.5.1 Posibilidad

Una proposición que es posiblemente verdadera se llama a veces "problemática". "Llueve" es una proposición asertórica; "es posible que llueva" es la correspondiente proposición problemática. También puede expresarse en español de otras maneras: "puede llover", "puede que llueva" y "podría llover".

Es importante tomar la modalidad en el sentido *sincrónico* (8.4.1, 9.2.1). Al decir, cuando no llueve, que puede llover, no se quiere decir solamente que puede llover más tarde (éste sería el sentido "diacrónico"), sino que podría llover "ahora", e. d., "sincrónicamente" (la palabra griega connota "al mismo tiempo"). Además, según el sentido de "posible" que presuponemos, lo real ya es posible. Si llueve realmente en este momento, decimos que es posible que llueva ahora; en efecto, los sistemas de lógica que desarrollaremos incluyen la implicación: si llueve entonces puede llover.

Como operador de la posibilidad usaremos el *diamante*: $\Diamond$. Si L expresa que *llueve*, tenemos:

$\Diamond L$: "es posible que llueva", "que llueva es posiblemente V", "puede llover", etcétera.

Cuando la negación se agrega, no hay que confundir los siguientes dos sentidos:

1. $\sim\Diamond L$: "no es posible que llueva", "es imposible que llueva", "que llueva es imposiblemente V", "no puede llover", "es F que sea posible que llueva", etc. (es equivalente a "es necesario que no llueva").
2. $\Diamond\sim L$: "es posible que no llueva", "que no llueva es posiblemente V", "que llueva es posiblemente F", "puede no llover", etc. (es equivalente a "no es necesario que llueva").

Otro símbolo usado frecuentemente para indicar la posibilidad es M (*möglich* significa *posible* en alemán). "Mp" y "$\Diamond p$" tienen el mismo significado.

El dominio de los operadores modales es como el de la negación y de los cuantificadores (2.3.5). En:

$\Diamond p > q$

el operador sólo rige p, pero en

$\Diamond[p > q]$

rige la implicación entera, $p > q$. Se usa frecuentemente términos latinos en el contexto de los operadores modales. El primer caso de arriba, cuando el operador forma parte de una expresión más grande, es "*de re*" (de la cosa). El segundo caso, cuando el operador rige toda la expresión, es "*de dicto*" (del aserto), pues los lógicos escolásticos llamaban la parte de una oración modal sin el operador lógico el "*dictum*" (lo dicho) (9.2.2). El dominio de los operadores modales no aléticos siguen la misma pauta.

4.1.5.2 Necesidad

Una proposición que es *necesariamente verdadera* a veces se llama "apodíctica" (*apodeictikos,* en griego). P. ej., a la proposición asertórica "llueve" le corresponde la apodíctica "es necesario que llueva" o bien, "tiene que llover", "es menester que llueva", "es necesariamente V que llueva".

Como operador de la necesidad usaremos el *cuadrado* $\Box$. Así pues:

$\Box L$: "es necesario que llueva", "es necesariamente V que llueva", "tiene que llover", etcétera.

$\sim\Box L$: "no es necesario que llueva", "que llueva no es necesariamente V", "es F que sea necesario que llueva", "no tiene que llover", etc. (es equivalente a "es posible que no llueva").

$\Box\sim L$: "es necesario que no llueva", "que llueva es necesariamente F" (es equivalente a "no es posible que llueva").

Observamos arriba (4.1.2) que las proposiciones que derivamos en la lógica elemental son necesarias. P. ej., porque la repetición condicionada, $p > [q > p]$, es tautología del cálculo proposicional, podemos derivar (12.2.1):

$\Box[p > [q > p]]$

Note que hay que encorchetar la expresión para que el operador modal ($\Box$) la gobierne totalmente.

Otro símbolo frecuentemente usado para la necesidad es L ("lógico"). P. ej., Lp significa lo mismo que $\Box p$.

4.1.5.3 Contingencia

Hay varios sentidos de contingencia. Según la versión que generalmente se considera como la fundamental en la lógica, una proposición es *contingente* cuando "es posible que sí y es posible que no".

Llamamos a este sentido la contingencia lógica básica. Si es contingente que llueva, entonces es posible que llueva y es posible que no llueva. Es evidente, pues, que la noción de la contingencia puede definirse en términos de la posibilidad (junto con la conjunción y la negación).

Usamos el *triángulo* ∇ como el operador de la contingencia:

∇L: "es contingente que llueva", "resulta, sucede que llueve", etc. (es equivalente a "puede llover y puede no llover").

$\sim\nabla L$: "no es contingente que llueve", "es F que sea contingente que llueva", etcétera.

$\nabla\sim L$: "es contingente que no llueva", "la falsedad de que llueva es contingente", etcétera.

Como la contingencia es derivada, presupondremos esta definición:

$$\nabla p =_{df} \Diamond p \ \& \ \Diamond\sim p$$

Naturalmente podemos realizar la sustitución en una prueba formal:

1	∇p	**h**
2	$\Diamond p \ \& \ \Diamond\sim p$	1 $\mathbf{r}_{df}$

1	$\Diamond p \ \& \ \Diamond\sim p$	**h**
2	∇p	1 $\mathbf{r}_{df}$

La incontingencia, $\sim\nabla p$, sería pues $\sim[\Diamond p \ \& \ \Diamond\sim p]$ o $\sim\Diamond p \vee \sim\Diamond\sim p$:

1	$\sim\nabla p$	**h**
2	$\sim[\Diamond p \ \& \ \Diamond\sim p]$	1 $\mathbf{r}_{df}$
3	$\sim\Diamond p \vee \sim\Diamond\sim p$	2 **oc**

Es importante entender que la contingencia significa sólo lo que la definición de arriba indica. Estipulamos que "es contingente que" exprese este sentido. De acuerdo con esto, es contingente tanto que la tierra tenga una sola luna (∇U) como que tenga dos (∇D). Lo que queremos decir es que la tierra puede tener una sola luna y puede no tener una sola luna ($\Diamond U \ \& \ \Diamond\sim U$), y que la tierra puede tener dos y puede no tener dos ($\Diamond D \ \& \ \Diamond\sim D$).

Sin embargo, cuando usamos las expresiones "contingentemente V" y "contingentemente F", el sentido es distinto. Si es contingentemente V que la tierra tenga una sola luna, entonces es V pero puede no ser V, en símbolos:

$$U \ \& \ \Diamond\sim U$$

Las frases "sucede que la tierra tiene una sola luna" y "resulta que la tierra tiene una sola luna", pueden indicar lo mismo. Llamaremos a este sentido la contingencia *sartreana* (8.1.2, 8.4.1). *No* usamos el ope-

rador de la contingencia, ∇, para representar este tipo de contingencia. La contingencia sartreana implica la contingencia lógica básica, pero no al revés (4.4).

La verdad (y falsedad) contingente se contrasta con la verdad (falsedad) necesaria. Por lo consiguiente, podemos hablar de las proposiciones V y F como de verdades y falsedades necesarias y contingentes (a veces se habla de hechos y contrahechos necesarios y contingentes):

	necesidad	*contingencia*
p es V	verdad necesaria $\Box p$	verdad contingente $p \,\&\, \Diamond{\sim}p$ ($p \,\&\, {\sim}\Box p$)
p es F	falsedad necesaria $\Box{\sim}p$ (${\sim}\Diamond p$)	falsedad contingente ${\sim}p \,\&\, \Diamond p$ (${\sim}p \,\&\, {\sim}\Box{\sim}p$)

En algunos sistemas modales se permite que se acumulen ("se iteren") los operadores modales; p. e., $\Box\Diamond p$ ("es necesario que sea posible que sea V que p"), $\Diamond\Diamond p$ ("es posible que sea posible que p").

4.1.6 La implicación estricta

Una implicación necesaria de la forma $\Box[p > q]$ se llama "estricta" (1.1.4.4, 9.4.1). Frecuentemente usaremos una *definición* para abreviar la expresión, empleando como operador la flecha $\rightarrow$:

$$p \rightarrow q =_{\mathrm{df}} \Box[p > q]$$

La definición puede usarse como regla. La necesidad de la repetición condicionada es un ejemplo:

1	$\Box[p > [q > p]]$	**h**
2	$p \rightarrow [q > p]$	1 $\mathbf{r}_{\mathrm{df}}$

Note que *no* es teorema modal $p \rightarrow [q \rightarrow p]$ (4.6). Se emplea frecuentemente la siguiente terminología (1.1.4.4):

- $p \rightarrow q$ — implicación *estricta*
- $p > q$ — *material*, verifuncional, filónica
- $\mathrm{U}x[\mathrm{F}x > \mathrm{G}x]$ — *formal*

También se usa el anzuelo como signo de la implicación estricta.

En ésta, pues, el operador modal $\Box$ es un predicado sencillo o monádico en el sentido de que indica una propiedad (lógica) de una sola cosa, a saber, una proposición molecular, la implicación $p > q$. En cambio, en la lógica de la relevancia, la oración condicional "si p entonces q" se concibe como un predicado diádico, e. d., una relación modal entre p y q, representable como $\mathrm{M}pq$. Hemos mencionado (1.1.4.4) en este contexto que los escolásticos analizaban "porque p, q" como una conjunción de tres proposiciones:

1. p implica q "estrictamente" ($p \rightarrow q$)
2. p
3. p causa q

Es interesante que "p causa q" es una relación (extralógica) entre p y q (Cpq) pero en "es necesario que si p entonces q" el predicado modal es un predicado lógico sencillo del *dictum*: $p > q$ (9.2.2).

4.1.7 Interdefinibilidad

Los modos de la posibilidad y necesidad son interdefinibles: "Es necesario que no llueva" equivale a "no es posible que llueva" y "es posible que no llueva" equivale a "no es necesario que llueva". Y podemos expresar "es contingente (en el sentido sartreano) que llueva" como "llueve pero es posible que no llueva" y "llueve pero no es necesario que llueva".

El hecho de ser interdefinibles la posibilidad y la necesidad implica que podríamos desarrollar toda la lógica modal (en sus varios sistemas) empleando *sólo* el operador y las reglas de la posibilidad o *sólo* el operador y las reglas de la necesidad. En este caso los dos sistemas, el que emplea $\Diamond$ y el que emplea $\Box$, serían equivalentes.

Sin embargo, para dar cuenta de nuestras intuiciones modales, las cuales incluyen ambos modos, combinaremos los dos sistemas. Para ir de una interpretación a otra, presupondremos estas equivalencias:

$$\Diamond p \quad <> \quad \sim\Box\sim p$$
$$\sim\Diamond p \quad <> \quad \Box\sim p$$
$$\Diamond\sim p \quad <> \quad \sim\Box p$$
$$\sim\Diamond\sim p \quad <> \quad \Box p$$

Note la semejanza con los cuantificadores (el universal es como la necesidad y el particular como la posibilidad). Esta analogía, reconocida ya en la escolástica, será relevante en la semántica de los mundos posibles. Trataremos de la demostración de estas equivalencias abajo (4.8).

Así como hemos hecho en los casos de las equivalencias de Ockham y Sherwood (2.3.8), empleamos las equivalencias como reglas. Llamaremos a esta regla "las equivalencias de la posibilidad y necesidad", abreviada como **pn.** Así tenemos, por ejemplo:

1	$\Diamond\sim p$	**h**
2	$\sim\Box p$	1 **pn**

1	$\Box\sim[p \,\&\, s]$	**h**
2	$\sim\Diamond[p \,\&\, s]$	1 **pn**

La incontingencia, $\sim\nabla p$ también podría representarse como

$\sim\Diamond p \vee \Box p$

porque $\Box p$ es equivalente a $\sim\Diamond\sim p$.

También se permite, como en el caso de **sh**, que la regla **pn** se aplique a varios operadores modales a la vez, y para indicar este atajo escribiremos el número de veces que se aplica entre paréntesis "(2)":

1	$\sim\Box\Diamond p$	**h**
2	$\Diamond\Box\sim p$	1 **sh** (2)

La derivación completa se dará abajo (4.8).

Se permite hacer el mismo atajo en el caso de cuantificador y operador modal:

1	$\sim\Diamond \mathrm{U}xFx$	**h**
2	$\Box \mathrm{E}x\sim Fx$	1 **pn**, **sh**

En la justificación hay que mencionar las dos reglas. La prueba se presentará más tarde (4.6).

4.1.8 Cuadro de la oposición modal

Es importante entender este cuadro escolástico porque lo usaremos para distinguir los varios sistemas modales. Valen todas las relaciones usuales entre las proposiciones:

necesidad		*imposibilidad*
$\Box p$	|	$\sim\Diamond p$ ($\Box\sim p$)
>	</>	>
posibilidad		*innecesidad*
$\Diamond p$	v	$\sim\Box p$ ($\Diamond\sim p$)
	∇p	
	($\Diamond p$ & $\Diamond\sim p$)	
	contingencia	

La proposición contingente ∇p se coloca abajo para indicar que es la conjunción de los subcontrarios ($\Diamond p$ & $\Diamond\sim p$).

4.1.9 Anillos de la cuantificación

En el siguiente esquema de dos anillos concéntricos, las flechas exhiben las implicaciones permitidas.[52] En los ejercicios se demostrará cada una de ellas.

[52] El esquema es una variante del deW. M. Kneale, p. 614.

$$
\begin{tikzcd}
 & & \Box \mathrm{U}xFx \arrow[d, leftrightarrow] & & \\
 & & \mathrm{U}x\Box Fx \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
\Diamond \mathrm{U}xFx \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathrm{U}x\Diamond Fx \arrow[dr] & & \mathrm{E}x\Box Fx \arrow[rr] \arrow[dl] & & \Box \mathrm{E}xFx \arrow[dl] \\
 & & & \mathrm{E}x\Diamond Fx \arrow[d, leftrightarrow] & & & \\
 & & & \Diamond \mathrm{E}xFx & & &
\end{tikzcd}
$$

Hay una controversia en torno a las implicaciones que permiten el intercambio de operadores modales y cuantificadores, las que median entre los anillos, juntándolos. Son a saber las "fórmulas de Barcan":

$\mathrm{U}x\Box Fx > \Box \mathrm{U}xFx$
$\Diamond \mathrm{E}xFx > \mathrm{E}x\Diamond Fx$

y sus implicaciones conversas, las cuales llamaremos las implicaciones "contrabarcaneanas":

$\Box \mathrm{U}xFx > \mathrm{U}x\Box Fx$
$\mathrm{E}x\Diamond Fx > \Diamond \mathrm{E}xFx$

y las implicaciones "horizontales":

$\Diamond \mathrm{U}xFx > \mathrm{U}x\Diamond Fx \quad \mathrm{E}x\Box Fx > \Box \mathrm{E}xFx$

las cuales llamaremos "de Buridano".[53] No hay inconvenientes sintácticos o formales con tal intercambio, pues todas las implicaciones pueden demostrarse en el sistema T con la excepción de las barcaneanas, las cuales sólo valen en S5 (4.7 y 12.2.3). Sin embargo, hay problemas filosóficos con la interpretación de estas seis implicaciones en el contexto de los mundos posibles y será necesario limitar su aplicación (13.4).

* UNIDAD DE EJERCICIOS 24: MODALIDAD

A. Simbolice (use *N*: nevar y *G*: granizar, *Ax*: *x* arremete contra los molinos de viento):

A1. Es posible que nieve.
A2. Puede no granizar.
A3. Puede nevar pero no puede granizar.
A4. Graniza y tiene que granizar.

[53] Ruth C. Barcan Marcus estudió las implicaciones que llevan su nombre, "A functional calculus of first order based on strict implication", *Journal of Symbolic Logic*, 11 (1946), 1-16, y A. Plantinga mencionó a Juan Buridano, lógico de mediados del siglo XIV, autor de *Perutile compendium totius logicae*, (París, 1487, etc.), en este contexto, *The Nature of Necessity*, capítulo 4, párr. 9.

A5. Es necesario que nieve pero no que granice.
A6. Es contingente que no granice y es contingente que granice.
A7. Es contingentemente V que granice.
A8. Es contingentemente F que nieve.
A9. Puede que nieve y granice.
A10. Puede que nieve y graniza.
A11. Si nieva, entonces puede nevar.
A12. Si nieva, entonces puede nevar y granizar.
A13. Tiene que nevar si nieva.
A14. Tiene que nevar si nieva y graniza.
A15. No es necesario que nieve pero es posible.
A16. Es posible que sea necesario que nieve.
A17. Es necesario que sea posible que nieve.
A18. Es necesario que sea necesario que nieve.
A19. Es imposible que sea necesario que nieve.
A20. Si es imposible que no nieve, entonces tiene que nevar.
A21. Es V que puede nevar.
A22. No es V que tenga que granizar.
A23. Es posiblemente V que granice.
A24. Es necesariamente V que nieve.
A25. Es necesariamente F que nieve.
A26. Es necesario que algo arremeta contra los molinos de viento.
A27. Algo tiene que arremeter contra los molinos de viento.
A28. Todo tiene que arremeter contra los molinos de viento.
A29. Algo puede arremeter contra los molinos de viento.
A30. Es posible que algo arremeta contra los molinos de viento.

B. Traduzca estas fórmulas al español y diga si son V o F (q: don Quijote, Mx: x es manchego, Cx: x es catalán, Ax: x arremete contra los molinos de viento, d: Dulcinea).

B1. Cq
B2. $\Box Mq$
B3. $\sim Ad$
B4. $\Diamond Mq$
B5. $\Diamond \mathrm{E}xMx$
B6. $\Diamond Ad$
B7. $\Diamond Cq$
B8. $\Box Aq$
B9. $\Diamond[\sim Ad \ \& \ Mq]$
B10. $\Diamond[Ad \ \& \ Cq]$

C. ¿Son V o F las proposiciones siguientes?

C1. $\Box[p \vee p]$
C2. $\Box[p \& p]$
C3. $\Box[p \vee \sim p]$

Diga por qué.

D. Ponga las formas equivalentes de las siguientes proposiciones, intercambiando necesidad y posibilidad:

D1. $\sim\Diamond S$
D2. $\Box N$
D3. $\Diamond[S \& G]$
D4. $\Box\sim[L \vee L]$
D5. $\sim\Diamond\sim[[p > q] > r]$
D6. $\sim\Box\sim p$
D7. $\Diamond\sim[L <> G]$
D8. $\sim\Box\Diamond p$
D9. $\Box\sim\Diamond p$
D10. $\Diamond\Box\sim p$
D11. $\sim\Diamond\Box\sim p$
D12. $\Diamond\Diamond p$
D13. $\sim\Box\sim\Box\sim p$
D14. $\sim\sim\Diamond\Box p$
D15. $\Diamond\sim\sim\Box p$

E. Ponga las formas equivalentes de las siguientes proposiciones, intercambiando definición y forma no abreviada:

E1. ∇L
E2. $\nabla[L \& G]$
E3. $\Diamond L \& \Diamond\sim L$
E4. $\nabla\Box \mathrm{U}xMx$
E5. $\Diamond[L > G] \& \Diamond\sim[L > G]$
E6. $\nabla\Diamond G$
E7. $\nabla\Box\sim \mathrm{E}xAx$
E8. $\nabla\sim\Box p$
E9. $\sim\nabla L$
E10. $\sim\nabla\Box p$

F. Resuelva estas pruebas categóricas:

F1. $[p \rightarrow q] <> \Box[p > q]$
F2. $[p \rightarrow q] > \sim\Diamond\sim[p > q]$

F3. $\Box[p > q] > \sim\Diamond[p \,\&\, \sim q]$
F4. $[p \vee \Diamond\sim r] \vee \Box r$
F5. $[\Box\sim q \,\&\, [\sim\Box r > p]] > [p \vee [\sim\Diamond q \,\&\, \Box r]]$
F6. $\Diamond\sim[Mq > \sim Cq] > \sim[Mq \rightarrow \sim Cq]$
F7. $\nabla p > \sim\Box p$
F8. $\nabla[p > q] > \sim[p \rightarrow q]$
F9. $\nabla[s \,\&\, t] > \sim\Box[p \,\&\, t]$
F10. $\Diamond p > [\sim\Box p > \nabla p]$
F11. $\sim\nabla p > \sim[\Diamond p \,\&\, \Diamond\sim p]$
F12. $[[p \rightarrow q] \rightarrow r] <> \Box[\Box[p > q] > r]$
F13. $[r \rightarrow [p \rightarrow q]] <> \Box[r > \Box[p > q]]$
F14. $\sim\Box\Diamond p > \Diamond\Box\sim p$

G. Demuestre mediante pruebas formales estos principios del cuadro modal de oposición:

G1. $\sim[\Box p <> \Diamond\sim p]$ (o sea, $\Box p \,</>\, \Diamond\sim p$, contradicción)
G2. $\Diamond p \vee \Diamond\sim p$ (subcontrariedad)
G3. $\sim[\Box p \,\&\, \Box\sim p]$ (o sea, $\Box p \mid \Box\sim p$, contrariedad)

H. Demuestre mediante pruebas formales estas implicaciones de los anillos de cuantificación y diga en qué sistema modal se demuestran:

H1. $Ux\Box Fx > Ex\Box Fx$
H2. $Ux\Diamond Fx > Ex\Diamond Fx$

I. En el contexto de los anillos, muestre por qué $Ux\Diamond Fx$ no implica $Ex\Box Fx$ ni $Ex\Box Fx$ implica $Ux\Diamond Fx$, y explique por qué las razones son parecidas.

J. Traduzca al español los ejercicios de D y E.

4.2 Reglas de la modalidad

Seguiremos hablando de reglas "de introducción y eliminación" en la lógica modal. Presentaremos primero las reglas más sencillas e intuitivas, la eliminación de la necesidad (**en**) y la introducción de la posibilidad (**ip**). Estas reglas representan el *vínculo con la verdad* (o, en ciertos casos, el "vínculo con la realidad"), pues ligan las proposiciones modales con asertóricas. Dicho de otra manera, ligan expresiones regidas por los operadores modales a expresiones que carecen de ellos.

- **en**: una proposición apodíctica implica la correspondiente asertórica; al decir de los escolásticos, "vale la inferencia de lo necesario al ser (*a necesse ad esse valet illatio*)".

- **ip**: una proposición asertóica implica la correspondiente problemática; "vale la inferencia del ser al poder-ser (*ab esse ad posse valet illatio*)".

A continuación describimos las subpruebas estrictas (y la distinción entre los tres sistemas modales que estudiaremos) y explicamos las dos reglas que las presuponen: la introducción de la necesidad (**in**) y la eliminación de la posibilidad (**ep**).

Las cuatro reglas *valen en cada uno* de los tres sistemas modales que estudiaremos: T, S4 y S5 (pero no necesariamente en otros sistemas modales). Lo que distingue los sistemas son las iteraciones permitidas en las subpruebas estrictas (éstas a su vez afectarán el sentido de las reglas que emplean subpruebas estrictas, **in** y **ep**).

Volvemos a observar un paralelismo con las reglas de la cuantificación (4.1.7). Tanto **icu** y **ece** como las dos últimas reglas modales **in** y **ep** utilizan subpruebas generales categóricas e hipotéticas. Una comparación:

eliminación

- del cuantificador universal (**ecu**)
- de la necesidad (**en**)

introducción

- del cuantificador existencial (**ice**)
- de la posibilidad (**ip**)

introducción (subpruebas categóricas)

- del cuantificador universal (**icu**)
- de la necesidad (**in**)

eliminación (subpruebas hipotéticas)

- del cuantificador existencial (**ece**)
- de la posibilidad (**ep**)

Para expresar las reglas usamos el mismo metalenguaje que en la lógica elemental. Los operadores □ y ◊, pues, como las otras constantes lógicas (&, >, U, E...) en el metalenguaje harán las veces de semejantes signos en el lenguaje objeto.

4.3 La regla de la eliminación de la necesidad

en: *eliminación de la necesidad*

Abreviamos la regla como **en**:

1	□*A*	
2	*A*	1 **en**

El sentido es que si una proposición es necesariamente V, entonces es V sin más. P. e., si es necesario que 2 + 2 = 4 (C; las proposiciones matemáticas generalmente se consideran como necesarias), entonces 2 + 2 = 4:

1	$\Box C$	**h**
2	C	1 **en**

Es evidente que la regla no vale al revés. No vale $p > \Box p$; si la tierra tiene una luna no se sigue que tenga que tenerla. Sin embargo, los griegos admitían una forma de tal determinismo (9.1).

Un ejemplo:

1	$p \rightarrow q$	**h**
2	$\Box[p > q]$	1 $\mathbf{r}_{df}$
3	$p > q$	2 **en**
4	$[p \rightarrow q] > [p > q]$	1-3 **ii**

En cuanto a la estrategia, es frecuentemente útil trabajar "de arriba abajo", e. d., quitar el operador $\Box$ de una fórmula que ya está justificada. Sin embargo, hay que retener el operador si queremos iterar la fórmula en una subprueba estricta (4.5).

* UNIDAD DE EJERCICIOS 25: LA REGLA **en**

A. Resuelva:

A1. $\Box\sim[p \,\&\, \sim q] > [\sim p \vee q]$
A2. $[[p \rightarrow q] \,\&\, \sim q] > \sim p$
A3. $\Box\sim[\Box\sim p \vee \Box p] > \nabla p$
A4. $\Box\Diamond p > \Diamond p$
A5. $\Box\Box p > \Box p$
A6. $\Box\nabla p > \nabla p$
A7. $\sim p > \sim\Box p$
A8. $[\sim p \,\&\, \Diamond p] > \nabla p$
A9. $[\sim p \,\&\, \Diamond[p \,\&\, q]] > \nabla[p \,\&\, q]$
A10. $\sim\Diamond ExAx > \sim Aq$
A11. $\sim\Diamond ExAx > \Diamond\sim ExAx$
A12. $\sim\Diamond\Diamond p > \sim p$

B. Explique por qué las fórmulas A4, A5 y A6 podrían llamarse "principios de reducción débiles".

C. Muestre que si no es contingente que Dios exista ($\sim\nabla D$), entonces su existencia es o necesaria o imposible.

D. Demuestre estos principios de la simplificación de los operadores modales:

D1. $\Box\Box p > \Box p$
D2. $\Box\Diamond p > \Diamond p$

4.4 La regla de la introducción de la posibilidad

ip: *introducción de la posibilidad*

Abreviamos la regla como **ip**:

1	A	
2	◊A	1 **ip**

El sentido es que si una proposición es V, entonces es posiblemente V. P. ej., si llueve, entonces es posible que llueva:

1	*L*	**h**
2	◊*L*	1 **ip**

La noción de la posibilidad que presuponemos, pues, es que cualquier proposición V implica *a fortiori* que ya es posible. Evidentemente, no vale al revés (NO: $\Diamond p > p$): si es posible que la tierra tenga dos lunas, no se sigue que las tenga. Sin embargo, los griegos admitían una forma de este principio: todas las posibilidades se realizan (9.1)

Según otra noción de la posibilidad, la "mera posibilidad", vale $\sim p$ & $\Diamond p$; si es "meramente posible" que don Quijote sea catalán, entonces no es catalán, pero puede (podría) serlo ($\sim Cq$ & $\Diamond p$). La mera posibilidad es un caso de la contingencia sartreana (p & $\Diamond\sim p$), en que "$\sim p$" reemplaza "p". Aplicaremos el calificativo "sartreano" sólo a la forma afirmativa. El signo ◊ sólo representa la contingencia básica, no la sartreana ni la mera posibilidad (en la que una proposición p implica $\sim p$ & $\Diamond p$). Tanto la contingencia sartreana como la mera posibilidad implican la contingencia básica (4.1.5.3):

1	p & $\Diamond\sim p$	**h**
2	p	1 **ec**
3	$\Diamond p$	2 **ip**
4	$\Diamond\sim p$	1 **ec**
5	$\Diamond p$ & $\Diamond\sim p$	3, 4 **ic**

1	$\sim p \,\&\, \Diamond p$	**h**
2	$\sim p$	1 **ec**
3	$\Diamond\sim p$	2 **ip**
4	$\Diamond p$	1 **ec**
5	$\Diamond p \,\&\, \Diamond\sim p$	3, 4 **ic**

En la estrategia, la regla **ip** se usa típicamente cuando se necesita una fórmula problemática en la resolución de una prueba.

* UNIDAD DE EJERCICIOS 26: LAS REGLAS **en** e **ip**

A. Resuelva:

A1. $\Box p > \Diamond p$ (subalternidad del cuadro de oposición modal)
A2. $\sim\Diamond p > \sim\Box p$
A3. $[p \rightarrow q] > \Diamond[p > q]$
A4. $[p \,\&\, \Diamond\sim p] > \nabla p$
A5. $\Box p > \Diamond\Box p$
A6. $\Diamond p > \Diamond\Diamond p$
A7. $\nabla p > \Diamond\nabla p$
A8. $\sim\Diamond\Diamond \mathrm{E}xAx > Aq$
A9. $\sim p > \sim\Box p$
A10. $\Box\Box p > \Diamond p$
A11. $\Box p > \Diamond\Diamond p$
A12. $\mathrm{U}x\Box Fx > \Box \mathrm{E}xFx$
A13. $Ad > \sim\Box\sim \mathrm{E}xAx$

B. Para pensar:

B1. ¿Qué significa A1 y por qué no vale al revés ($\Diamond p > \Box p$)?
B2. ¿Qué significa A2 y por qué no vale al revés ($\sim\Box p > \sim\Diamond p$)?
B3. ¿Qué significa A4 en términos de lo que hemos dicho de la fórmula $p \,\&\, \Diamond\sim p$?
B4. Muestra que la mera posibilidad ($\sim p \,\&\, \Diamond p$) es una forma de la contingencia sartreana ($p \,\&\, \Diamond\sim p$).
B5. Explique por qué las fórmulas A5, A6, A7 y A11 podrían llamarse "principios de reducción débiles".

C. Demuestre mediante pruebas formales estas implicaciones de los anillos de cuantificación y diga en qué sistema modal se demuestran:

C1. $\Box \mathrm{E}xFx > \Diamond \mathrm{E}xFx$
C2. $\Box \mathrm{U}xFx > \Diamond \mathrm{U}xFx$
C3. $\mathrm{U}x\Box Fx > \mathrm{U}x\Diamond Fx$
C4. $\mathrm{E}x\Box Fx > \mathrm{E}x\Diamond Fx$

D. Demuestre estos dos principios, los cuales expresan que lo imposible implica todo estrictamente (*ex impossibili sequitur quodlibet*) y todo implica lo necesario (*necessarium sequitur ex quolibet*):

D1. $\sim\Diamond p > [p \rightarrow q]$
D2. $\Box q > [p \rightarrow q]$

4.5 Subpruebas estrictas y los sistemas T, S4 y S5

Los secuentes subordinados estrictos o subpruebas estrictas usadas en la lógica modal se asemejan a las generales (2.3.5), pero en vez de tener una letra como índice (x, y, ...) tienen el signo de la necesidad ($\Box$); pueden ser categóricas o hipotéticas:

La subprueba categórica corresponde al operador "fuerte", el de la necesidad, y la subprueba hipotética al "débil", el de la posibilidad (4.1.3).

El cuadradito, como los índices de las subpruebas generales, indica que hay restricciones en torno a lo que puede iterarse en las subpruebas, y a veces de lo que puede sacarse de ellas. Es importante entender estas restricciones, porque con su ayuda distinguiremos entre los sistemas lógicos T, S4 y S5 (12.1).

Hay (al menos) tres maneras de iterar proposiciones en una subprueba general (sea ésta categórica o hipotética), y distinguirán entre los tres sistemas modales. El cuadro modal muestra estas diferencias (4.1.8):

1. En el sistema T

$\Box p$	$\Box\sim p$
$\Diamond p$	$\sim\Box p$
∇p	

— HAY QUE quitar el operador modal

En T sólo pueden iterarse las proposiciones superiores del cuadro, pero hay que quitar el operador:

1	$\Box p$		
2	$\Box\sim p$		
3	$\Box$	p	1 i (T)
4		$\sim p$	2 i (T)

La proposición $\sim\Diamond p$, porque $\sim\Diamond p <> \Box\sim p$, es iterable como $\sim p$:

1	$\sim\Diamond p$	**h**
2	$\Box\sim p$	1 **pn**
3	$\Box$ $\sim p$	2 **i** (T)

2. En el sistema S4

$\Box p$	$\sim\Diamond p$ o $\Box\sim p$	— NO se quita el operador modal
$\Diamond p$	$\sim\Box p$	
∇p		

En T4 sólo pueden iterarse las proposiciones superiores del cuadro junto con sus operadores:

1	$\Box p$	
2	$\Box\sim p$	
3	$\sim\Diamond p$	
4	$\Box$ $\Box p$	1 **i** (S4; también S5)
5	$\Box\sim p$	2 **i** (S4; también S5)
6	$\sim\Diamond p$	3 **i** (S4; también S5)

En S4 se puede iterar $\sim\Diamond p$ directamente porque equivale a $\Box\sim p$ (la proposición es apodíctica).

Note que S4 es más fuerte que T, pues siempre puede quitarse el cuadradito en la subprueba (mediante **en**), lo cual equivale a iterar la proposición sin él:

1	$\Box p$	
2	$\Box$ $\Box p$	1 **i** (S4)
3	p	2 **en**; como 1 **i** (T)

3. En el sistema S5

$\Box p$	$\sim\Diamond p$ o $\Box\sim p$	
$\Diamond p$	$\sim\Box p$ o $\Diamond\sim p$	— NO se quita el operador modal
∇p		

En el sistema S5 todas las proposiciones pueden ser iteradas, pero sin quitar los operadores modales. Y porque la última prueba de las anteriores muestra que un operador de arriba ($\Box p$ y $\Box\sim p$) puede quitarse por **en**, vamos a permitir que en S4 y S5 se itere con o sin el operador $\Box$.

Las reglas **ip** y **en** no requieren subpruebas y valen en los tres sistemas T, S4 y S5. Por lo tanto, una prueba formal en que sólo se usan estas reglas pertenece a T, el más débil. Por ejemplo:

1	L	**h**
2	$\Diamond L$	1 **ip**

"si llueve, puede llover", es válido en T (y también en S4 y S5). Frecuentemente, es útil en la lógica indicar el sistema más débil en que vale una prueba, sobreentendiéndose que también vale en sistemas más fuertes.

La siguiente prueba demuestra que las proposiciones contingentes pueden iterarse en una subprueba estricta en S5:

1	∇p	**h**
2	$\Diamond p$ & $\Diamond\sim p$	1 $\mathbf{r}_{df}$
3	$\Diamond p$	2 **ec**
4	$\Diamond\sim p$	2 **ec**
5	$\Box$ $\Diamond p$	3 **i** (S5)
6	$\Diamond\sim p$	4 **i** (S5)
7	$\Diamond p$ & $\Diamond\sim p$	5, 6 **ic**
8	∇p	7 $\mathbf{r}_{df}$

Ejemplos de iteraciones permitidas:

1		$\Box p$	
2		$\Box{\sim}p$	
3		${\sim}\Diamond p$	
4		$\Diamond p$	
5		$\Diamond{\sim}p$	
6		${\sim}\Box p$	
7		∇p	
8	$\Box$	$\Box p$	1 **i** (S5; también S4)
9		$\Box{\sim}p$	2 **i** (S5; también S4)
10		${\sim}\Diamond p$	3 **i** (S5; también S4)
11		$\Diamond p$	4 **i** (S5)
12		$\Diamond{\sim}p$	5 **i** (S5)
13		${\sim}\Box p$	6 **i** (S5)
14		∇p	7 **i** (S5)
15		p	1 **i** (T; también, aplicando en, S4 y S5)
16		${\sim}p$	2 **i** (T; también, aplicando en, S4 y S5)

El sistema de L. E. J. Brouwer (fundador de la escuela "intuicionista") constituye un cuarto caso. En él también se puede iterar todas las proposiciones, pero hay que quitar el operador de la necesidad de las dos formas de arriba ($\Box p$ y $\Box{\sim}p$); claro que hay que retener el operador de la posibilidad de las formas de abajo ($\Diamond p$ y $\Diamond{\sim}p$).

Note que *en ninguno* de estos sistemas puede iterarse una proposición asertórica, ni afirmativa ni negativa. Sin embargo, sí podemos hacer esto:

1		p	
2		$\Diamond p$	1 **ip**
3	$\Box$	$\Diamond p$	1 **i** (S5)

Primero introducimos el operador de la posiblidad y ya podemos iterar esta fórmula problemática (paso 2) en la subprueba estricta.

Es un atajo iterar en dos subpruebas a la vez; en realidad hay tantas iteraciones como subpruebas y se llevan a cabo una tras otra. Hay que asegurarse, pues, de observar las restricciones si las subpruebas son generales o estrictas. En la siguiente prueba el primer paso, Fx, no puede iterarse por dos razones: *1*) por ser asertórica no puede iterarse en la subprueba estricta y *2*) por tener x libre no puede iterarse en la subprueba general:

NO 1 | Fx

□	x		
	...		

paso 1 no puede iterarse

* UNIDAD DE EJERCICIOS 27: SUBPRUEBAS ESTRICTAS

A. Diga si las proposiciones de la página siguiente pueden iterarse en una subprueba estricta y, si es posible, diga en cuál de los sistemas (T, S4, S5) se permite la iteración:

1 | $\Diamond{\sim}p$
2 | $\Box{\sim}p$
3 | ${\sim}\Diamond p$
4 | $\Diamond \mathrm{U}xAx$
5 | p
6 | ${\sim}\Box{\sim}G$
7 | ∇G
8 | Gx
9 | $\Box Gx$
10 | $\Diamond Gx$
11 | $\Diamond{\sim}\mathrm{E}x{\sim}Ax$
12 | $p \rightarrow q$
13 | $\mathrm{E}x\Box Rax$
14 | $\mathrm{E}x\Diamond Rax$
15 | $\Box \mathrm{U}xRax$
16 | $\Diamond \mathrm{E}xRax$
17 | $\Diamond[s \vee t]$
18 | $p > q$
19 | $\Diamond\Box \mathrm{U}xFx$
20 | $\Box\Diamond \mathrm{U}xFz$
21 | $\Box \mathrm{E}xRxy$
22 | $\mathrm{U}x\Diamond Rxy$
23 | ${\sim}\Diamond\Box N$
24 | $\mathrm{U}x\Diamond \mathrm{E}yRxy$
25 | $\Box[\Diamond p > q]$

□	x	¿?
	...	

B. De las expresiones que pueden iterarse en los ejercicios de A, diga la forma en que hay que hacerlo

C. Prácticamente ¿cuál es el único tipo de proposición que *no* puede iterarse en S5?

D. ¿Cuál es el sistema más débil (T, S4 o S5) en que valen los principios débiles de la acumulación y simplificación de los operadores modales: $\Box p > \Diamond\Box p$, $\Diamond p > \Diamond\Diamond p$, $\nabla p > \Diamond\nabla p$, $\Box\Box p > \Box p$, $\Box\Diamond p > \Diamond p$ y $\Box\nabla p > \nabla p$.

4.6 La regla de la introducción de la necesidad

in: *introducción de la necesidad*

La regla, abreviada como **in**, emplea una subprueba estricta *categórica*:

1	$\Box$ ...	
n	A	
$n+1$	$\Box A$	1-n **in**

La referencia numérica alude al primero y al último paso de la subprueba.

Ejemplos:

1	$\Box[p > q]$	**h**
2	$\Box p$	**h**
3	$\Box$ p	2 **i** (T)
4	$p > q$	1 **i** (T)
5	q	3, 4 **mp**
6	$\Box q$	3-5 **in**
7	$\Box p > \Box q$	2-6 **ii**
8	$\Box[p > q] > [\Box p > \Box q]$	1-7 **ii**

1	$\Box[p \& q]$	**h**
2	$\Box$ $p \& q$	1 **i** (T)
3	p	2 **ec**
4	$\Box p$	2-3 **in**
5	$\Box$ $p \& q$	1 **i** (T)
6	q	5 **ec**
7	$\Box q$	5-6 **in**
8	$\Box p \& \Box q$	4, 7 **ic**
9	$\Box[p \& q] > [\Box p \& \Box q]$	1-8 **ii**

1	$\Diamond[p \vee q]$	**h**
2	$c \mid \sim[\Diamond p \vee \Diamond q]$	**h**
3	$\sim\Diamond p \,\&\, \sim\Diamond q$	2 **oc**
4	$\sim\Diamond p$	3 **ec**
5	$\sim\Diamond q$	3 **ec**
6	$\Box\sim p$	4 **pn**
7	$\Box\sim q$	5 **pn**
8	$\Box \mid c \mid p \vee q$	**h**
9	p	**h**
10	$\sim p$	6 (T)
11	$p \,\&\, \sim p$	9, 10 **ic**
12	q	**h**
13	$\sim q$	7 **i** (T)
14	$p \,\&\, \sim p$	12,13 **eng**
15	$p \,\&\, \sim p$	8, 9-11, 12-14 **ed**
16	$\sim[p \vee q]$	8-15 **ing**
17	$\Box\sim[p \vee q]$	8-16 **in**
18	$\sim\Diamond[p \vee q]$	17 **pn**
19	$\Diamond[p \vee q]$	1 **i**
20	$\Diamond p \vee \Diamond q$	2-19 **ing**

La prueba larga del atajo de arriba (4.1.7) es la siguiente:

1	$\sim\Diamond \mathrm{U}xFx$	**h**
2	$\Box\sim \mathrm{U}xFx$	1 **pn**
3	$\Box \mid \sim \mathrm{U}xFx$	2 **i**
4	$\mathrm{E}x\sim Fx$	3 **sh**
5	$\Box \mathrm{E}x\sim Fx$	3-4 **in**

Dijimos arriba (4.1.6) que $p \rightarrow [q > p]$ es teorema de la lógica modal, pero $p \rightarrow [q \rightarrow p]$ no lo es, Usando las formas no abreviadas, tenemos:

1	$\Box$ p	**h**
2	q	**h**
3	p	1 **i**
4	$q > p$	2-3 **ii**
5	$p > [q > p]$	1-4 **ii**
6	$\Box[p > [q > p]]$	1-5 **in**

NO	1	$\Box$ p	**h**
	2	$\Box$ q	**h**
			paso 1 no puede iterarse
		$q > p$	(**ii**)
		$\Box[q > p]$	(**in**)
		$p > \Box[q > p]$	(**ii**)
		$\Box[p > \Box[q > p]]$	(**in**)

Hablando en general de la estrategia del uso de la regla **in**, se trabaja "de abajo a arriba". Cuando haya abajo una expresión gobernada *totalmente* por el operador $\Box$, puede justificarse rutinariamente con **in**.

La regla **in** permite formular una regla derivada de uso frecuente: el *modus ponens estricto* (**mpe**):

1	$A \rightarrow B$	
2	$\Box A$	
3	$\Box B$	1, 2 **mpe**

por ejemplo:

1	$p \rightarrow q$	**h**
2	$\Box p$	**h**
3	$\Box q$	1, 2 **mpe**

Puede demostrarse sin usar este atajo:

1	$p \rightarrow q$	**h**
2	$\Box p$	**h**
3	$\Box[p > q]$	1 $\mathbf{r}_{\mathbf{df}}$
4	$\Box$ $p > q$	1 **i** (T)
5	p	2 **i** (T)
6	q	4, 5 **mp**
7	$\Box q$	4-6 **in**

* UNIDAD DE EJERCICIOS 28: LAS REGLAS **en**, **ip**, **in**

A. Resuelva, indicando el sistema en que se permite las iteraciones (use **mpe** donde sea posible):

A1. $\Box[p \,\&\, q] <> [\Box p \,\&\, \Box p]$
A2. $[\Box p \,\&\, [p \rightarrow q]] > \Box q$
A3. $[p \,\&\, [p \rightarrow q]] > q$
A4. $[p > p] \,\&\, [p \rightarrow p]$
A5. $[[p \rightarrow q] \,\&\, [q \rightarrow r]] \rightarrow [p \rightarrow r]$
A6. $\Box[p > [q > p]]$
A7. $\Box\Box p <> \Box p$
A8. $\sim\Box\Box p > \sim\Box p$
A9. $\Diamond p > [[\Diamond p > q] \rightarrow q]$
A10. $\sim L \rightarrow \sim\Box L$
A11. $\Diamond p <> \Box\Diamond p$
A12. $\nabla p > \Box\nabla p$
A13. $[p \rightarrow q] > [\Box p \rightarrow \Box q]$
A14. $\Box p > \Box\Diamond p$
A15. $\Box[a = a]$
A16. $(a = b) <> \Box(a = b)$
A17. $\Box \mathrm{U}xFx > \mathrm{U}x\Box Fx$
A18. $\Box \mathrm{U}x[Fx > Gx] > [\Diamond Fx > \Diamond Gx]$
A19. $\Box p > \Box\Diamond p$
A20. $[p \rightarrow q] <> [\sim q \rightarrow \sim p]$
A21. $\sim\Box p > \Diamond\sim p$
A22. $[[p \rightarrow q] \,\&\, [q \rightarrow r]] > [p \rightarrow r]$
A23. $[\sim\Diamond p \,\&\, [p \rightarrow s]] > \Box s$
A24. $[\sim\Diamond t \,\&\, [p \rightarrow t]] > \sim\Diamond p$
A25. $[\Box p \,\&\, [\Diamond p \rightarrow t]] > \Box t$

B. Para pensar:

B1. La pauta de A2 a veces se llama *modus ponens estricto*; formúlelo como regla.
B2. Explique lo que significa A4.
B3. ¿Cómo se llama el principio que A5 exhibe?
B4. En A6 muestre que el principio de la "repetición condicionada" ($p > [q > p]$) es necesario; haga una prueba formal que demuestre que algún otro principio del cálculo proposicional (tautología) es necesario.
B5. Indique en qué sistema modal vale las implicaciones $\Box\Box > \Box p$ y $\Box p > \Box\Box p$ de la equivalencia en el caso de A7.
B6. ¿Qué significa A8?
B7. Indique en qué sistema modal valen las implicaciones $\Diamond p > \Box\Diamond p$ y $\Box\Diamond p > \Diamond p$ de la equivalencia de A12.
B8. En qué sistema modal vale el principio de A13?
B9. ¿Qué significa A14?
B10. ¿Qué significan A16 y A17?
B11. En torno a A20, diga si $\Box \mathrm{U}x[Fx > Gx]$ es equivalente a $\mathrm{U}x[Fx \rightarrow Gx]$ y explique por qué.
B12. Un principio del "argumento ontológico" de san Anselmo (siglo XI) es "necesariamente, si Dios existe, entonces tiene que existir"; demuestre que si es cierto, la existencia de Dios no es contingente (D: Dios existe):

$$\Box[D > \Box D] > \sim\nabla D$$

B13. La fórmula $[p > q] <> \sim[p \,\&\, \sim q]$ muestra el sentido de la implicación material: "que p implica q significa que la conjunción de p y $\sim q$ es F; ¿qué sentido muestra A22 que tiene la implicación estricta?

C. Demuestre mediante pruebas formales estas implicaciones de los anillos de modalidad y cuantificación y diga en qué sistema modal se demuestran:

C1. $\Box \mathrm{U}xFx > \Box \mathrm{E}xFx$
C2. $\Box \mathrm{U}xFx > \mathrm{U}x\Box Fx$ (una de las contrabarcaneanas)
C3. $\mathrm{E}x\Box Fx > \Box \mathrm{E}xFx$ (una implicación de Buridano)

4.7 Fórmulas de Barcan

Las siguientes inferencias de los anillos de modalidad y cuantificación, llamadas las "fórmulas de Barcan" (4.1.9),

$$\mathrm{U}x\Box Fx > \Box \mathrm{U}xFx$$

$$\Diamond \mathrm{E}xFx > \mathrm{E}x\Diamond Fx$$

son demostrables en S5. Las demostraciones son complejas; observe el uso doble de la **ip** que permite la iteración en S5 (los pasos 2 y 4 en la primera prueba y 3 y 5 en la segunda):

1	$Ux\Box Fx$	**h**
2	$\Diamond Ux\Box Fx$	1 **ip**
3	$\Box \mid x \mid c \mid \sim Fx$	**h** (negación de 13)
4	$\Diamond\sim Fx$	3 **ip**
5	$\sim\Box Fx$	4 **pn**
6	$\Box \mid c \mid Ux\Box Fx$	**h** (negación de 10)
7	$\Box Fx$	6 **ecu**
8	$\sim\Box Fx$	5 **i** (S5)
9	$\sim Ux\Box Fx$	6-8 **ing**
10	$\Box\sim Ux\Box Fx$	6-9 **in**
11	$\sim\Diamond Ux\Box Fx$	10 **pn**
12	$\Diamond Ux\Box Fx$	2 **i** (S5)
13	Fx	3-12 **ing**
14	$UxFx$	3-13 **icu**
15	$\Box UxFx$	3-14 **in**

1	$\Diamond ExFx$	**h**
2	$c \mid \sim Ex\Diamond Fx$	**h**
3	$\Diamond\sim Ex\Diamond Fx$	2 **ip**
4	$\Box \mid x \mid c\ Fx$	**h**
5	$\Diamond Fx$	4 **ip**
6	$\Box \mid \Diamond Fx$	5 **i** (S5)
7	$Ex\Diamond Fx$	6 **ice**
8	$\Box Ex\Diamond Fx$	6-7 **in**
9	$\sim\Diamond\sim Ex\Diamond Fx$	8 **pn**
10	$\Diamond\sim Ex\Diamond Fx$	3 **i** (S5)
11	$\sim Fx$	4-10 **ing**
12	$Ux\sim Fx$	4-11 **icu**
13	$\sim ExFx$	12 **sh**
14	$\Box\sim ExFx$	4-13 **in**
15	$\sim\Diamond ExFx$	14 **pn**
16	$\Diamond ExFx$	1 **i**
17	$Ex\Diamond Fx$	2-16 **ing**

En el sistema S5 podemos permitir, como atajo, que se itere en una subprueba estricta cualquiera de las implicaciones de los anillos, incluso sus negaciones, en las subpruebas estrictas.[54] Con el uso de este atajo especial, sería más fácil exhibir las fórmulas de Barcan:

1	$Ux\Box Fx$	**h**
2	$\Box \mid x \mid Ux\Box Fx$	1 **i** (S5, especial)
3	$\Box Fx$	2 **ecu**
4	Fx	3 **en**
5	$UxFx$	2-4 **icu**
6	$\Box UxFx$	2-5 **in**

1	$\Diamond ExFx$	**h**
2	$c \mid \sim Ex\Diamond Fx$	**h**
3	$\Diamond \mid c \mid ExFx$	**h**
4	$x \mid c \mid Fx$	**h**
5	$\Diamond Fx$	4 **ip**
6	$Ex\Diamond Fx$	5 **ice**
7	$\sim Ex\Diamond Fx$	2 **i** (S5, especial)
8	$\sim Fx$	4-7 **ing**
9	$\sim ExFx$	4-8 **icu**
10	$\Box \sim ExFx$	3-9 **ing**
11	$\sim \Diamond ExFx$	10 **in**
12	$\Diamond ExFx$	1 **i**
13	$Ex\Diamond Fx$	1-12 **ing**

El sentido de estas implicaciones, y de las de Buridano, será discutida más adelante (13.4; 4.1.9).

[54] Ver el comentario sobre $Ux\Box\emptyset$ (12.2.3).

4.8 La regla de la eliminación de la posibilidad

ep: *eliminación de la posibilidad*

La regla, abreviada como **ep**, emplea una subprueba estricta *hipotética*:

1	$\Diamond A$	
2	$\Box$ | A	**h**
	...	
n	B	
$n+1$	$\Diamond B$	1, 2-n **ep**

La regla opera en una proposición problemática (paso 1) y la hipótesis de la subprueba estricta es la misma proposición sin el operador de la posibilidad ($\Diamond$). En la referencia numérica se alude tanto a esta proposición inicial (paso 1) como a la subprueba. Es importante prefijar con el diamante ($\Diamond$) cualquier proposición que se saque de la subprueba (B en $n + 1$); o sea, lo que se saca *siempre* será una proposición problemática.

Demos unos ejemplos. La derivación larga del "atajo" de 4.17 es:

1	$\sim\Box\Diamond p$	**h**
2	$\Diamond\sim\Diamond p$	1 **pn**
3	$\Box$ | $\sim\Diamond p$	**h**
4	$\Box\sim p$	3 **pn**
5	$\Diamond\Box\sim p$	2, 3-4 **ep**

La fórmula $[\Diamond p \ \& \ [p \rightarrow q] > \Diamond q$ es otro principio de **mp** para la implicación estricta:

1	$\Diamond p$	**h**
2	$p \rightarrow q$	**h**
3	$\Box[p > q]$	2 $\mathbf{r}_{\mathrm{df}}$
4	$\Box$ | p	**h**
5	$p > q$	3 **i** (T)
6	q	4, 5 **mp**
7	$\Diamond q$	1, 4-6 **ep**

Agregamos demostraciones de dos versiones del principio **pn** (4.1.7). Se pueden demostrar las cuatro implicaciones de aquellas cuyos antecedentes son regidos por la tilde; por ejemplo:

1	$\sim\Diamond p$	**h**
2	$\Box \mid c \mid p$	**h**
3	$\Diamond p$	2 **ip**
4	$\sim\Diamond p$	1 **i**
5	$\sim p$	2-4 **ing**
6	$\Box\sim p$	2-5 **in**

1	$\sim\Box p$	**h**
2	$c \mid \sim\Diamond\sim p$	**h**
3	$\Box \mid c \mid \sim p$	**h**
4	$\Diamond\sim p$	3 **ip**
5	$\sim\Diamond\sim p$	2 **i**
6	p	3-5 **ing**
7	$\Box p$	3-6 **in**
8	$\sim\Box p$	1 **i**
9	$\Diamond\sim p$	2-8 **ing**

Para demostrar las otras cuatro implicaciones hace falta un supuesto: el absurdo es imposible. La razón es que no se puede obtener una contradicción en la subprueba de la **ing** (3-5 y 4-6 en las dos siguientes pruebas), debido a que cualquier proposición que se saque de la subprueba estricta tiene que recibir el diamante como prefijo. El absurdo puede ser, p. ej., una proposición contradictoria, como p & $\sim p$. El signo "$\wedge$" simboliza el absurdo; el supuesto sería, pues, $\sim\Diamond\wedge$: el absurdo es imposible (en los pasos 7 y 8 de abajo). El supuesto funciona como axioma aquí y vendrá al caso en otras versiones de la lógica.

1	$\Box\sim p$	**h**
2	$c \mid \Diamond p$	**h**
3	$\Box \mid p$	**h**
4	$\sim p$	1 **i** (T)
5	$\wedge$ 3,	4 **eng**
6	$\Diamond\wedge$	2, 3-5 **ep**
7	$\sim\Diamond\wedge$	supuesto
8	$\sim\Diamond p$	2-7 **ing**

1		$\Diamond{\sim}p$	**h**
2	c	$\Box p$	**h**
3		$\Diamond{\sim}p$	1 **i**
4	$\Box$	${\sim}p$	**h**
5		p	3 **i** (T)
6		$\wedge$	4, 5 **eng**
7		$\Diamond\wedge$	3, 4-6 **ep**
8		${\sim}\Diamond\wedge$	supuesto
9		${\sim}\Box p$	2-8 **ing**

Así que tenemos ${\sim}\Diamond p <> \Box{\sim}p$ y ${\sim}\Box p <> \Diamond{\sim}p$.

Otra solución alternativa, y probablemente más satisfactoria, se podría presuponer en las equivalencias **pn** (o al menos las implicaciones cuyos antecedentes no comienzan con la tilde) como reglas primitivas.[55] Con el supuesto las dos salen en T.

En cuanto a la estrategia de la regla **ep**, se trabaja "de arriba hacia abajo". Es decir, cuando tenemos arriba una fórmula problemática ya justificada y otra abajo por justificar (y cuando otras reglas obvias no son aplicables), hay que construir una subprueba para abajo y derivar la fórmula de abajo con **ep**.

* UNIDAD DE EJERCICIOS 29: LAS REGLAS **en, ip, in, ep**

A. Resuelva:

A1. $\Diamond[p \vee q] <> [\Diamond p \vee \Diamond q]$
A2. $[\Diamond p \,\&\, \Box q] > \Diamond[p \,\&\, q]$
A3. $[p \rightarrow q] > [\Diamond p > \Diamond q]$
A4. $[p \rightarrow q] <> {\sim}\Diamond[p \,\&\, {\sim}q]$
A5. ${\sim}[\Diamond p \,\&\, \Diamond q] > [\Box{\sim}p \vee \Box{\sim}q]$

B. Demuestre estas implicaciones de los anillos y diga en qué sistema modal se demuestran:

B1. $\Diamond \mathrm{U}xFx > \Diamond \mathrm{E}xFx$
B2. $\Diamond \mathrm{U}xFx > \mathrm{U}x\Diamond Fx$ (una implicación de Buridano)
B3. $\mathrm{E}x\Diamond Fx > \Diamond \mathrm{E}xFx$ (una contrabarcaneana)

C. Demuestre estas implicaciones de **pn** (claro, sin usar **pn**) y diga en qué sistema modal se realiza la demostración:

C1. ${\sim}\Box{\sim}p > \Diamond p$
C2. ${\sim}\Diamond{\sim}p > \Box p$

[55] Véase Fitch, p. 72.

C3. $\Diamond p > \sim\Box\sim p$
C4. $\Box p > \sim\Diamond\sim p$

D. Demuestre que la modalidad es necesaria, indicando también en qué sistema (T, S4 o S5) se hace la demostración:

D1. $\Box p > \Box\Box p$
D2. $\Diamond p > \Box\Diamond p$
D3. $\nabla p > \Box\nabla p$

4.9 Multiplicación y reducción de operadores modales

Hemos de hablar más detalladamente sobre la acumulación y eliminación de los operadores modales en la semántica de los mundos posibles (12.2.2), pero es importante notar las distintas implicaciones permitidas por los sistemas T, S4 y S5. P. ej., en T se permite $\Box\Box p > \Box p$ pero no $\Box p > \Box\Box p$, y en S4 se permite las dos, e. d., la coimplicación $\Box\Box p <> \Box p$. En este esquema se indican las implicaciones permitidas en los tres sistemas; cuando disminuyen el número de operadores a veces se llaman "principios de reducción":

T, S4, S5	>	$\Box\Box p \bullet \Box p$	<	S4, S5
T, S4, S5	>	$\Diamond p \bullet \Diamond\Diamond p$	<	S4, S5
T, S4, S5	>	$\Box p \bullet \Diamond\Box p$	<	S5
T, S4, S5	>	$\Box\Diamond p \bullet \Diamond p$	<	S5

T (y S4 y S5) permite todas las inferencias "hacia la derecha" y S4 o S5 permiten dos inferencias "hacia la izquierda" (ver caps. 12 y 13).

Así se demuestran las implicaciones permitidas sólo en S5:

1	$\Diamond p$	**h**
2	$\Box \mid \Diamond p$	1 **i** (S5)
3	$\Box\Diamond p$	2 **in**

1	$\Diamond\Box p$	**h**
2	$c \mid \sim\Box p$	**h**
3	$\Box \mid \sim\Box p$	2 **i** (S5)
4	$\Box\sim\Box p$	3 **in**
5	$\sim\Diamond\Box p$	4 **pn**
6	$\Diamond\Box p$	1 **i**
7	$\Box p$	2-6 **ing**

* UNIDAD DE EJERCICIOS 30: REDUCCIÓN

A. Demuestre todas las inferencias de arriba.

Capítulo 5

LÓGICA EPISTÉMICA

5.0 Ubicación

Hemos visto (4.1.3) que los operadores "modales" pueden recibir interpretaciones no aléticas. Las "aplicaciones" de la lógica modal han suscitado mucha discusión filosófica; en particular la lógica epistémica (del saber y creer), la deóntica (de la obligación ética) y la temporal (de los tiempos). Todos estos sistemas, como también la modal alética, presuponen la elemental y pueden combinarse uno con otro.

Explicamos a continuación el sentido general de la lógica epistémica y presentamos sus reglas. Comentamos abajo (14.3) el sentido de los operadores y su relevancia filosófica.

La palabra "epistémica" tiene un sentido general, en cuanto abarca las nociones del saber y del creer, y tiene un sentido específico en cuanto sólo indica la lógica del saber y, en este caso, la lógica del creer se llama "doxástica":

$$\text{epistémica} \left\{ \begin{array}{l} \text{epistémica—saber} \\ \\ \text{doxástica—creer} \end{array} \right.$$

La palabra "conocimiento" se usa frecuentemente como sustantivo que corresponde al verbo "saber". Podemos decir, pues, que la lógica epistémica en el sentido amplio trata del conocimiento y de la creencia. En griego, *epistēmē* significa el saber, la ciencia (*scientia* en latín) y *doxa* (*opinio* en latín) el parecer, la opinión, la apariencia.

La lógica epistémica emplea los operadores básicos: "Fulano sabe que" y "Fulano cree que". "Fulano" (el símbolo "*f*"; "*m*", "Mengano"; etc.) en este contexto funciona como una constante individual, un nombre que puede aplicarse a cierto ser inteligente. Algunos sistemas epistémicos se desarrollan sin usar ninguna variable para la persona que sabe o cree; sus operadores significan "se sabe que" y "se cree que". Nosotros nos referimos explícitamente a los "sabedores" y "creedores" porque deseamos discutir cómo se relacionan lógicamente el saber y el creer de distintas personas.

Hay, pues, varios tipos de lógica epistémica. Las variedades dependerán de las reglas que se permiten, e. d., de los sistemas modales formales que incorporan. Las reglas a su vez afectarán el mismo sentido de "saber" y "creer". El sistema de Jaakko Hintikka es básico y lo expondremos aquí.[56] Su sistema presupone un sentido relativamente fuerte de las nociones del saber y del creer.

[56] *Knowledge and Belief/ An Introduction to the Logic of the Two Notions*, 1962; véase Snyder, pp. 201 y ss.

Es importante entender que no se trata de encontrar el significado filosófica o lingüísticamente "correcto" de vocablos como "saber" y "creer" (14.3.4). En el lenguaje ordinario estas palabras evidentemente tienen varios sentidos. En el análisis conceptual —el de Hintikka en este contexto se considera como ejemplar—, escogemos el sentido que deseamos para ciertos fines filosóficos específicos.

El sistema de creencias de una persona no es estática; cambia constantemente a través de la vida. Por lo tanto, debe limitarse la aplicación de la lógica epistémica a lo que se sabe o se cree en algún momento de la vida cognoscitiva. Hintikka restringe su aplicación a una sola "ocasión", durante la cual la persona no aprende nada (fáctico, relevante) nuevo ni se olvida de nada. La restricción podría expresarse también en términos del *habitus* escolástico.

5.1 Símbolos de la lógica del saber

"Saber" tiene un sentido "fuerte", "primario", "filosófico": el de sostener una *opinión* V por motivos adecuados o conclusivos. En la lógica epistémica, en el sentido estricto, e. d., en la lógica del saber, hay dos operadores, uno fuerte (4.1.3) y el otro débil:

Sfp: "Fulano sabe que *p*"
Pfp: "es posible, hasta dónde Fulano sepa, que *p*"

A veces *Pfp* se lee "es creíble para Fulano que *p*" (no usamos esta traducción). Estos operadores corresponden de manera general a los operadores modales fuerte y débil:

Sfp	análogo con:	$\Box p$
Pfp	análogo con:	$\Diamond p$

Los operadores epistémicos, como los modales, son interdefinibles. P. ej., se entiende que "Fulano no sabe que llueve" (*~SfL*) es equivalente a "que sepa Fulano, es posible que no llueva". Aquí está el esquema:

Sfp	<>	*~Pf~p*
~Sfp	<>	*Pf~p*
Sf~p	<>	*~Pfp*
~Sf~p	<>	*Pfp*

Permitimos que estas equivalencias se usen como regla, abreviada **ps**; p. ej. (*q*: don Quijote; *L*: llueve):

1	*~SqL*	**h**
2	*Pq~L*	1 **ps**

Como en el caso de la modalidad (4.1.3), la lógica del saber podría desarrollarse usando sólo *Sfp* o sólo *Pfp*. Permitiremos el atajo de cambiar varios operadores a la vez (2.3.8, 4.1.7):

1	$\sim PfSmp$	**h**
2	$SfPm\sim p$	**ps**

o inclusive:

1	$\sim Pf\Box ExFx$	**h**
2	$Sf\Diamond Ux\sim Fx$	1 **ps**, **pn**, **sh**

En la lógica alética usamos el operador fuerte □ y el débil ◊ casi indiferentemente. La razón es que las dos nociones, la necesidad y la posibilidad, son usuales en la filosofía y en el discurso ordinario. Sin embargo, en la lógica epistémica (y doxástica), el operador fuerte *Sf* representa una noción mucho más común en el lenguaje ordinario que el débil *Pf*, razón por la cual frecuentemente es más cómodo limitarse al uso del operador fuerte en la filosofía (5.5.5).

Observe estas traducciones usuales de "saber que" y "saber si":

- Dulcinea sabe que llueve: *SdL*
- Dulcinea sabe que no llueve: *Sd~L*
- Dulcinea sabe *si* llueve (o no), o sea, o sabe que llueve o sabe que no llueve: *SdL* v *Sd~L*
- Dulcinea no sabe *que* llueve: *~SdL*
- Dulcinea no sabe *si* llueve (o no), o sea, ni sabe que llueve ni que no llueve: *~SdL* & *~Sd~L*

* UNIDAD DE EJERCICIOS 31: TRADUCCIÓN

A. Traduzca al español (*L*: llueve, *N*: nieva, *A*: arremete contra los molinos de viento, *q*: don Quijote, *d*: Dulcinea; las implicaciones no tienen que ser correctas):

A1. *~SfAq*
A2. *Sf~Ad*
A3. *~PqAq* & *Sd~Aq*
A4. *Pd~L*
A5. *SdSqN*
A6. *~SfN* & *~Sf~N*
A7. *~SqL* v *~Sd~L*
A8. *Pfp* > *PfPfp*
A9. *Aq* > *~Sq~Aq*
A10. *Sfp* v *Sfq*
A11. *Sfp* > *p*
A12. *Sfp* > *SfSfp*
A13. *p* > *Pfp*
A14. *Sf~p* > *~p*
A15. *~p* > *Pf~p*
A16. *~p* > *~Sfp*

A17. $Sfp > p$
A18. $p > Pfp$
A19. $p > Sfp$
A20. $PfSfp > Sfp$
A21. $Pfp > SfPfp$
A22. $Sf[p \& q] > Sfp$
A23. $[Sfp \& Sfq] > Sf[p \& q]$
A24. $[Pfp \& Pfq] > Pf[p \& q]$
A25. $Sf\Diamond Ux{\sim}Fx > {\sim}Pf\Box ExFx$

B. Escriba las formas equivalentes de las siguientes expresiones, usando **ps**:

B1. ${\sim}Sfp$
B2. $Sd{\sim}\Diamond Aq$
B3. ${\sim}Pd{\sim}L$
B4. $Pf[p \& q]$
B5. ${\sim}Sf{\sim}Sfp$
B6. $Pf{\sim}Sfp$
B7. $Sf{\sim}Sfp$
B8. $Pf{\sim}ExAx$
B9. ${\sim}SfUxAx$
B10. ${\sim}UxSxf$

C. Traduzca las fórmulas de B.

D. Diga si se siguen intuitivamente las implicaciones de A11 hasta A25.

E. Formalice estas oraciones:

E1. Dulcinea sabe que no llueve.
E2. Don Quijote no sabe que nieva.
E3. Dulcinea sabe que don Quijote no sabe que llueve.
E4. Fulano no sabe si nieva.
E5. Fulano sabe si nieva.
E6. Fulano no sabe si Mengano (m) sabe que llueve.
E7. Si Fulano sabe que llueve y graniza, entonces no sabe que no graniza.
E8. Si santa Teresa (p) sabe si Dios existe (D), entonces Dios existe.
E9. Si Dios no existe, entonces santa Teresa no sabe si existe.
E10. Si santa Teresa sabe que Dios existe, entonces existe.

F. Resuelva:

F1. ${\sim}Sfp > Pf{\sim}p$
F2. $[SdL \& {\sim}SqL] > Pq{\sim}L$
F3. $[SfN > [N \& Pf{\sim}N]] > {\sim}SfN$

F4. $[SdAq \vee Sd{\sim}Aq] > [PdAq > SdAq]$
F5. ${\sim}SfSfUxFx > Pf{\sim}SfUxFx$

5.2 Símbolos de la lógica del creer

El sentido de "creer" es el de sostener una *opinión racional*. Es compatible con el saber; en efecto, el saber implica el creer. Pero éste, a diferencia de aquél, no entraña la verdad. El sistema de Hintikka presupone un umbral relativamente alto de racionalidad (otros sistemas no exigen tanta). Por lo tanto, las creencias en este sentido no son meras "ocurrencias", "impresiones" y el verbo "creo" en este contexto es más exigente que "supongo", "sospecho", "me parece", "se me hace".

La lógica doxástica, la del creer, también tiene un operador fuerte y uno débil:

Cfp: "Fulano cree (opina racionalmente) que *p*"
Tfp: "P es compatible con todo lo que Fulano cree"

A veces se lee para *Tfp* "es plausible para Fulano que *p*" (no usaremos esta interpretación). Estos operadores corresponden *a grandes rasgos* a los epistémicos:

Cfp	análogo a:	*Sfp*
Tfp	análogo a:	*Pfp*

Pero hay diferencias sintácticas importantes entre la lógica del saber y la del creer. Existe efectivamente menos correspondencia entre los operadores doxásticos y los modales que entre los epistémicos y estos últimos.

Como los operadores del saber, los doxásticos son interdefinibles. P. ej., se entiende que "Fulano no cree que llueve" (${\sim}CfL$) es equivalente a "es compatible con todo lo que Fulano cree que no llueva" ($Tf{\sim}L$). Aquí está el esquema:

Cfp	<>	${\sim}Tf{\sim}p$
${\sim}Cfp$	<>	$Tf{\sim}p$
$Cf{\sim}p$	<>	${\sim}Tfp$
${\sim}Cf{\sim}p$	<>	*Tfp*

Está permitido que estas equivalencias se usen como regla, abreviada **tc**; p. ej. (*q*: don Quijote; *L*: llueve):

1	${\sim}CqL$	**h**
2	$Tq{\sim}L$	1 **tc**

Puede usarse en este contexto el atajo de cambiar más de un operador a la vez (5.1):

1	${\sim}SfCfp$	**h**
2	$PfTf{\sim}p$	1 **ps**, **tc**

Como en el caso de la lógica epistémica y modal, la del creer se podría desarrollar usándose un solo operador: sólo *Cfp* o sólo *Tfp*. Ya que el operador fuerte *Cf* representa una noción mucho más común en el lenguaje ordinario que el débil *Tf*, muchas veces conviene limitarse al uso del operador fuerte en la filosofía (5.5.5).

Observe que "Fulano no cree que llueva" puede significar literalmente que no cree que llueva (*~CfL*) o puede tener el sentido más fuerte "cree que no llueve" (*Cf~L*). Hay que distinguir cuidadosamente entre estos matices.

* UNIDAD DE EJERCICIOS 32: TRADUCCIÓN

A. Traduzca al español (*L*: llueve, *N*: nieva, *A*: arremete contra los molinos de viento, *q*: don Quijote, *d*: Dulcinea; las implicaciones no tienen que ser correctas):

A1. *~CfAq*
A2. *Cf~Ad*
A3. *~CfN & ~Cf~N*
A4. *CfN* v *Cf~N*
A5. *SdCqN*
A6. *CdSqAq*
A7. *SqSqL*
A8. *Cfp > CfCfp*
A9. *Aq > ~Tq~Aq*
A10. *CfAq > Aq*
A11. *Cfq > ~Tf~q*
A12. *Sfp > Cfp*
A13. *p > Tfp*
A14. *Tf~p*
A15. *~Tfp*
A16. *Cf~p > ~Cfp*
A17. *~Cfp > Cf~p*
A18. *Cfp > CfpCfp*
A19. *CfpCfp > Cfp*
A20. *Cfp > Tfp*
A21. *Tfp > CfTfp*
A22. *Cf [p & q] > Cfp*
A23. *[Cfp & Cfq] > Cf[p & q]*
A24. *[Cfp & Cfq] > Cfp*
A25. *[Tfp & Tfq] > [Tfp & Tfq]*

B. Escriba las formas equivalentes de las siguientes expresiones, usando **ps**:

B1. *~Cfp*
B2. *Cd~◊Aq*
B3. *~Ṫd~L*
B4. *Tf [p & q]*

B5. $\sim Cf\sim Cfp$
B6. $Tf\sim Cfp$
B7. $Cf\sim Cfp$
B8. $Tf\sim ExFx$
B9. $\sim CfUxFx$
B10. $\sim UxCxf$

C. Traduzca las fórmulas de B.

D. Diga si se siguen intuitivamente las implicaciones de A11 hasta A25.

E. Formalice:

E1. Dulcinea cree que no llueve.
E2. Don Quijote no cree que llueva.
E3. Dulcinea sabe que don Quijote no cree que llueve.
E4. Don Quijote no cree que Dulcinea sabe si nieva.
E5. Fulano cree que cree que llueve.
E6. Fulano no sabe si Mengano (m) cree que llueve.
E7. Si Fulano cree que llueve y graniza, entonces no cree que no nieva.
E8. Si Karl Marx (m) cree que Dios no existe (D), entonces Dios no existe.
E9. Si Dios no existe, entonces Marx no puede creer que existe.
E10. Si santa Teresa sabe que Dios existe, entonces cree que existe.

F. Resuelva:

F1. $\sim Cfp > Tf\sim p$
F2. $[CdL \,\&\, \sim CqL] > Tq\sim L$
F3. $[CfN > [N \,\&\, Tf\sim N]] > \sim CfN$
F4. $[CdAq \vee Cd\sim Aq] > [TdAq > CdAq]$
F5. $\sim CfCfUxFx > Tf\sim CfUxFx$

5.3 Reglas de vínculo con la verdad

Hay dos reglas que relacionan lo que se sabe con la verdad o realidad. Según una tradición filosófica que se extiende hasta Platón, el conocimiento (el saber) es una creencia u opinión V y la persona está justificada al sostenerla. Encontramos las tres condiciones del saber explícitamente en Ockham (Jfp: "Fulano está justificado en aceptar que p"):

$$Sfp > [Cfp \,\&\, p \,\&\, Jfp]$$[57]

[57] Knuuttila, *Modalities*..., p. 178.

La validez de estas implicaciones ilustra el "sentido fuerte" o "filosófico" o "responsable" del conocimiento (14.33). La noción del saber en este sentido también conlleva la posesión de evidencia adecuada. A veces se agrega un cuarto requisito: la "indefectibilidad". Digamos que son las tres y veo que el reloj, que nunca me ha fallado en 20 años, dice 3:00. ¿Puedo decir que lo *sé*? No necesariamente, pues puede que se haya parado el reloj hace exactamente doce horas. Por lo tanto no puedo decir que lo "sé" a pesar de cumplirse las primeras tres condiciones (son las tres, creo que son las tres y estoy justificado al aceptar que son las tres).

La segunda implicación ($Sfp > Cfp$) será demostrada en la lógica doxástica (5.5), pero introducimos la primera como la regla:

es: *eliminación del operador del saber*

Abreviamos la regla como **es** (usamos f en vez de usar una variable metalingüística):

1	SfA	
2	A	1 **es**

Un ejemplo:

1	SdL	**h**
2	L	1 **es**

Si Dulcinea *sabe* que llueve, entonces llueve; o sea, no puede "saber" que llueve sin que llueva. La contraposición de esta prueba puede aparecer más convincente:

1	$SdL > L$	**h**
2	$\sim L > \sim SdL$	1 **conpos**

pues, si no llueve, entonces Dulcinea no sabe que llueve.

Es importante tener en cuenta que en la lógica doxástica no existe ninguna regla que corresponda a **es** (no existe ninguna "eliminación del creer"). La razón es que $Cfp > p$ no vale como principio, pues el hecho de que Dulcinea *crea* que llueve no implica que llueve. Tenemos aquí en efecto un indicio de la gran diferencia entre el saber y el creer: el creer es compatible con la falsedad de lo creído, pero el saber no es compatible con la falsedad de lo sabido. Dicho de otra manera, la lógica tiene un vínculo con la verdad, pero la lógica doxástica no lo tiene. Una gran parte de la comunicación dialógica filosófica consta de una pugna de creencias u opiniones más bien que de conocimientos.

Note que la regla **es** corresponde a **en** de la lógica modal. Podemos demostrar fácilmente el principio que corresponde a la regla modal **ep**. Pero también vamos a usar este principio como:

ie: *introducción del operador de la posibilidad epistémica "hasta donde sepa Fulano"*

Abreviamos la regla como **ie** (usamos *f* en vez de una variable metalingüística):

1	*A*	
2	*PfA*	1 **ie**

La demostración mencionada:

1	*A*	**h**
2	~*PfA*	**h**
3	*Sf*~*A*	2 **ps**
4	*A*	1 **i**
5	~*A*	3 **es**
6	*PfA*	2-5 **eng**

Un ejemplo:

1	*Aq*	**h**
2	*PdAq*	1 **ie**

Si don Quijote arremete contra los molinos de viento, entonces, que sepa Dulcinea, es posible que lo haga.

La lógica doxástica también carece de una regla que corresponda a **ie** (no existe ninguna "introducción del operador de la compatibilidad con todo lo que Fulano cree"). La razón es que la verdad no tiene que ser compatible con lo que se cree. La lógica doxástica, pues, también carece de este tipo de vínculo con la verdad.

Podemos considerar las reglas **es** e **ie** como vínculos entre lo "intensional", "mental", "pensado" o "dicho" y lo "real" o "verdadero". Construyamos un cuadro de oposición epistémico, donde valgan las relaciones proposicionales usuales. Las cajas simbolizan la realidad extramental, pues contienen fórmulas faltas de operadores modales (*p* y ~*p*), y las flechas indican los vínculos con la realidad:

Sfp	|	*Sf*~*p*
↓		↓
$\boxed{p}$	</>	$\boxed{\sim p}$
↓		↓
Pfp (~*Sf*~*p*)	v ~*Sf*~*p* & ~*Sfp*	*Pf*~*p* (~*Sfp*)

Note que la proposición ~*Sf*~*p* & ~*Sfp* corresponde a la contingencia modal ◊*p* & ◊~*p*, pues la "contingencia epistémica" es "no saber *si*" (4.18).

El cuadro doxástico no despliega ninguna conexión con la verdad. Tampoco es válida la demostración de arriba, porque falta la regla que corresponde a **es**:

1	*A*	**h**
2	~*TfA*	**h**
3	*Cf*~*A*	2 **tc**
4	*A*	1 **i**
5	— no se permite derivar ~*A* de 3	
6	*TfA*	**(eng)**

Curiosamente, parece haber una excepción cuando se combinan operadores doxásticos y deónticos (14.4.3).

El cuadro doxástico, el cual no podemos establecer con las reglas que tenemos hasta ahora, sería:

Cfp	|	*Cf*~*p*
↓	</>	↓
Tfp (~*Cf*~*p*)	v	*Tf*~*p* (~*Cfp*)
	~*Cf*~*p* & ~*Cfp*	

Note que la "contingencia doxástica" es la vacilación ("duda", *dubitum* en latín): Fulano ni cree que no *p* ni cree que *p* (4.18). Este concepto de la vacilación era importante en el análisis epistémico escolástico (9.2.4, 14.4.4).

* UNIDAD DE EJERCICIOS 33: LAS REGLAS **es**, **ie**

A. Demuestre estas relaciones del cuadro epistémico:

A1. *Sfp* > *p*
A2. ~*p* > ~*Sfp*
A3. *Sfp* | *Sf*~*p* (equivale a ~[*Sfp* & *Sf*~*p*])
A4. *Pfp* v *Pf*~*p*
A5. *Sfp* </> *Pf*~*p* (equivale a ~[*Sfp* <> *Pf*~*p*])

B. Resuelva (*m*: "Mengano"; *d*: Dios; *H*: ser humano; *T*: 3 + 3 = 6).

B1. [*Sfp* & *Smq*] > [*p* & *q*]
B2. [*p* & *q*] > [*Pfp* & *Pmp* & *Pfq* & *Pmq*]
B3. *SfSfq* > *q*
B4. *SfSmp* > *p*

B5. $Sf[p \& q] > [q \& p]$
B6. $\sim Sf[p \& Sm\sim p]$
B7. $Ux[Hx > SxT] > [Hf > T]$
B8. $[p > Sdp] > [p > Pdp]$
B9. $\Box[Sdp <> p] > [\Box Sdp > \Box p]$
B10. $[Sfp \& [\Diamond p > q]] > q$

C. Comente el sentido de B1, B3, B4, B6, B7 y B9.

D. Traduzca y resuelva:

D1. Si no llueve, entonces Fulano no sabe que llueve.
D2. Si Mengano sabe que nieva, entonces es posible, hasta donde sepa Fulano, que nieva.
D3. Si no es posible, hasta donde sepa Fulano, que llueva o no llueva, entonces 3 & 3 = 8.
D4. Si Fulano sabe que Dulcinea tiene que bromear, entonces Dulcinea bromea.
D5. Es necesario que si Dios o Marx sabe que Dulcinea bromea, entonces Dulcinea bromea.

5.4 Secuentes subordinados epistémicos

5.4.1 Los secuentes

La lógica epistémica, como la modal, dispone de reglas que exigen el empleo de secuentes subordinados o subpruebas. Las subpruebas de la lógica del saber se llaman "epistémicas" y las del creer "doxásticas". El índice de las epistémicas es *Sf* y el de las doxásticas es *Cf*. Se refiere a *f* ("Fulano") porque el saber y el creer es relativo a la persona que sabe o cree. En las subpruebas epistémicas sólo pueden iterarse las proposiciones que Fulano sabe y en las doxásticas sólo las que Fulano cree o sabe. Las subpruebas del saber y del creer pueden ser categóricas o hipotéticas, distinción que corresponde a los operadores fuertes y débiles (4.5).

Las reglas del saber y del creer son análogas a las de la cuantificación y de la modalidad alética. También las subpruebas del saber y del crecer corresponden a las subpruebas generales de la lógica cuantificada y a las estrictas de la alética. Tenemos, pues, este paralelismo (anticipamos las abreviaturas de las reglas epistémicas y doxásticas):

x | — **icu**	$\Box$ | — **in**	Sf | — **is**	Cf | — **ib**
x ⊢ — **ece**	$\Box$ ⊢ — **ep**	Sf ⊢ — **ee**	Cf ⊢ — **et**

La lógica doxástica, por carecer del vínculo con la verdad, no tiene más que dos reglas, las cuales emplean subpruebas.

5.4.2 La iteración

Note en primer lugar que si una fórmula gobernada por un operador epistémico o doxástico (*Sfp* o *Cfp*) ha de iterarse en una subprueba epistémica o doxástica, la persona que sabe o cree (*f*) tiene que ser la misma mencionada en el índice de la subprueba (*Sf* o *Cf*); p. ej., *SfL*, "Fulano sabe que llueve" puede iterarse en una subprueba con el índice *Sf*, pero no en una con el índice *Sm*, donde *m* ("Mengano") denota a otro pensador. Asimismo, *Cfp* (y *Sfp*) sólo puede iterarse en las subpruebas con el índice *Cf*.

Sólo las fórmulas prefijadas por el operador del saber (*Sfp*), pues, caben en una subprueba del saber. Pero en una del creer pueden iterarse tanto las fórmulas gobernadas por el operador del saber como las gobernadas por el del creer (*Sfp* o *Cfp*). E. d., en una subprueba de índice *Sf* sólo pueden iterarse las oraciones con el prefijo *Sf*, pero en una de índice *Cf* pueden iterarse oraciones regidas o por *Cf* o por *Sf*. La razón es que todo lo que se sabe también se cree, pues *Sfp* > *Cfp*. En realidad, no habría que afirmar explícitamente que una proposición sabida, como *Sfp*, puede iterarse en una subprueba doxástica, porque *Cfp* es derivable de *Sfp*:

1	*Sfp*	
2	*Cfp*	1 consecuencia permitida
3	*Cf* | *Cfp*	2 **i**

Sin embargo, es intuitivamente satsifactorio y prácticamente más fácil (y quizás estéticamente más elegante) ensanchar la iteración para incluir las dos formas *Cfp* y *Sfp*.

Siguiendo la estrategia de Hintikka, vamos a permitir que las fórmulas gobernadas por los operadores epistémicos y doxásticos se iteren o *con* o *sin* los operadores. Evidentemente tal iterabilidad corresponde a los sistemas modales T, cuando se quitan, y S4, cuando no (pero hay que recordar que a la lógica doxástica le faltan las reglas que corresponden a **en** e **ip** en T y S4). Así pues, tenemos estas posibles iteraciones:

1	*Sfp*	**h**
2	*Sf* | *Sfp*	1 **i**
3	| *p*	1 **i**

1	*Cfp*	**h**
2	*Sfp*	**h**
3	*Cf* | *Cfp*	1 **i**
4	| *p*	1 **i**
5	| *Sfp*	2 **i**
6	| *p*	2 **i**

Se podría iterar *Sfp* y después quitar el operador *Sf* mediante **es** (p. ej., para justificar 3 de la primera prueba de arriba), procedimiento que no es permitido en el caso de *Cfp*, porque falta la regla doxástica correspondiente.

Observe que las iteraciones en que se guardan los operadores son más fuertes que las que se realizan sin ellos (también S4 es más fuerte que T). Se admiten debido a que hay por qué aceptar los principios que permite la acumulación de operadores:

$Sfp > SfSfp$
$Cfp > CfCfp$

G. Ryle receló del primero porque le parece que la implicación descansa sobre la "introspección" de los estados mentales; sin embargo, la justificación de Hintikka no depende de la introspección. R. Swinburne, que trabaja con un sistema epistémico más débil, no querría admitir la iteración de *Cfp* como *p*, porque permitiría (con la regla **ib**) la implicación $[Cfp \& Cfq] > Cf[p \& q]$ (si Fulano cree que *p* y cree que *q*, entonces cree que *p* y *q*).

El contenido de estas subpruebas, pues, se limita a *un sector* de la vida cognoscitiva de un individuo: lo que sabe (indicado por las subpruebas epistémicas) y lo que opina racionalmente (indicado por las doxásticas). Se excluye no sólo lo que no forma parte de su propia vida cognoscitiva sino también lo que no alcanza el nivel requerido de racionalidad.

* UNIDAD DE EJERCICIOS 34: SUBPRUEBAS EPISTÉMICAS

A. Diga si las siguientes proposiciones pueden iterarse en la subprueba epistémica (del saber); diga, de poderse hacer, cómo aparece en la subprueba (con o sin operador):

A.1	p
A.2	$\Diamond p$
A.3	Sfp
A.4	$\sim Sf\Diamond p$
A.5	Cfp
A.6	$\Box Sfp$
A.7	$\Box Cfp$
A.8	$Sfp \& q$
A.9	$Cf[p \& q]$
A.10	$Sf[p > q]$
A.11	Smq
A.12	Cmp
A.13	$SfSmp$
A.14	$SfCmp$
A.15	Pfp
A.16	$Sf\,\mathrm{U}x\,[Fx > Gx]$
A.17	$Cf\,\mathrm{E}x\,[Fx \& Gx]$
A.18	$Cf\,\Box\mathrm{E}xGx$
A.19	$CfCmp$
A.20	$SfCmp$
	Sf ¿?

B. Diga si las siguientes proposiciones pueden iterarse en la subprueba doxástica (del creer), y, de poderse diga cómo aparece en la subprueba (con operador o sin él):

B.1	p
B.2	$\Diamond p$
B.3	Sfp
B.4	$\sim Sf\Diamond p$
B.5	Cfp
B.6	Tfp
B.7	$\Box Cfp$
B.8	$Sfp \ \& \ Cfq$
B.9	$Cf\,[p \ \& \ q]$
B.10	$Sf\,[p > q]$
B.11	Smq
B.12	Cmp
B.13	$Sf\,Smp$
B.14	$SfCmp$
B.15	Pfp
B.16	$Sf\ \mathrm{U}x[Fx > Gx]$
B.17	$Cf\ \mathrm{E}x[Fx \ \& \ Gx]$
B.18	$Cf\ \Box \mathrm{E}xGx$
B.19	$CfCmp$
B.20	$SfCmp$

Cf | ¿?

5.5 Reglas

5.5.1 Introducción del operador del saber

Las reglas **es** e **ie** aseguran un contacto entre el saber y lo verdadero o "real", y la ausencia de reglas paralelas en la lógica doxástica excluye tal contacto. Las otras reglas epistémicas y doxásticas son paralelas y forman los pares **is/ib** y **ee/et**.

La regla introductoria del saber es:

is: *introducción del saber*

La regla, abreviada como **is**, emplea una subprueba estricta *categórica*:

1	Sf	...	
n		A	
$n+1$	SfA		1-n **is**

En la referencia numérica se alude a la subprueba. Al sacarse un paso de la subprueba (n), tiene que recibir el prefijo *Sf*.

Por ejemplo, la fórmula *Sfp* > *SfSfp* se demuestra así:

1	*Sfp*	**h**
2	*Sf* | *Sfp*	**h**
3	*SfSfp*	1, 2-6 **is**

Si Fulano sabe que nieva, entonces sabe que lo sabe.

Note que no puede demostrarse ~*Sfp* > *Sf*~*Sfp*:

NO	1	~*Sfp*	**h**
		Sf | —*Sfp* no puede iterarse	
		Sf~*Sfp*	(**is**)

Si Fulano no es tan sagaz como Sócrates, quien sabía que nada sabía, el hecho de que haya algo que Fulano no sepa no implica que sepa que no lo sabe. Una regla más compleja, que atañe a "el problema de Moore" que estudiaremos adelante (14.3.3).

1	*c* | *Sf*[*p* & ~*Sfp*]	**h**
2	*p* & ~*Sfp*	1 **es**
3	~*Sfp*	2 **ec**
4	*Sf* | *p* & ~*Sfp*	1 **i**
5	*p*	4 **ec**
6	*Sfp*	4-5 **is**
7	~*Sf*[*p* & ~*Sfp*]	1-6 **ing**

Cuando se demuestra una proposición como la conclusión de esta prueba, Hintikka dice que la conjunción *p* & ~*Sfp* es "epistémicamente inconsistente" para Fulano (14.3.3, 14.6.1).

5.5.2 Introducción del operador del creer

La regla introductoria del creer es:

ib: *introducción del operador del creer*

La regla, abreviada como **ib**, también emplea una subprueba estricta *categórica*:

1	*Cf* | ...	
n	A	
$n + 1$	*CfA*	1-n **ib**

En la referencia numérica se alude a la subprueba. Al sacarse un paso de la subprueba (n), tiene que recibir el prefijo *Cf*.

Por ejemplo, la fórmula *Cfp* > *CfCfp* se demuestra así:

1	*Cfp*	**h**
2	*Cf* | *Cfp*	1**i**
3	*CfCfp*	1 **ib**

Si Fulano cree que nieva, entonces cree que lo cree. La referencia de la subprueba tiene un solo número porque no tiene más que un solo paso. Se muestra el principio *Sfp* > *Cfp* así:

1	*Sfp*	**h**
2	*Cf* | *p*	1 **i**
3	*Cfp*	2**ib**
4	*Sfp* > *Cfp*	1-3 **ii**

La siguiente prueba se relaciona con el problema de Moore:

1	*c* | *Cf* [*p* & ~*Cfp*]	**h**
2	*Cf* | *p* & ~*Cfp*	1 **i**
3	~*Cfp*	2 **ec**
4	*Cf* | *p* & ~*Cfp*	1 **i**
5	*p*	4 **ec**
6	*Cfp*	4-5 **ib**
	...	
7	~*Cf* [*p* & ~*Cfp*]	1... **ing**

Note que no parece posible producir una contradicción en el secuente que corresponde a la **ing**:

6	| *Cfp*	4-5 **ib**
	<— ¿?	
	~*Cf*[*p* & ~*Cfp*]	1... **ing**

La razón es que todo lo que se saque de la subprueba doxástica tiene que recibir el prefijo *Cf*, el cual no puede quitarse, porque falta la regla que corresponde a **es**. Con otras palabras, se debe a que en el sistema doxástico no hay vínculo con la verdad. Pero podría asumirse como axioma o supuesto ~*Cf*∧: no se cree el absurdo (∧ podría ser, p. ej., *p* & ~*p*). En este caso se podría sacar *Cf*[*p* & ~*p*] de la subprueba y agregar el axioma para obtener la contradicción:

1	c	$Cf[p \& \sim Cfp]$	**h**
2		Cf $p \& \sim Cfp$	1 **i**
3		$\sim Cfp$	2 **ec**
4		Cf $p \& \sim Cfp$	1 **i**
5		p	4 **ec**
6		Cfp	4-5 **ib**
7		$p \& \sim p$	3, 6 **eng**
8		$Cf[p \& \sim p]$	1, 2-7 **ic**
9		$\sim Cf[p \& \sim p]$	supuesto
10		$\sim Cf[p \& \sim Cfp]$	1-9 **ing**

Hintikka llama la conjunción ($p \& \sim Cfp$) de tal conclusión: "doxásticamente inconsistente" para Fulano.

5.5.3 Eliminación del operador de la posibilidad epistémica

La regla eliminativa del saber es:

ee: *eliminación del operador de la posibilidad epistémica "hasta donde Fulano sepa"*

La regla, abreviada como **ee**, emplea una subprueba epistémica *hipotética*:

1	PfA		
2	Sf	A	
		...	
n		B	
$n + 1$	PfB		1, 2-n **ee**

La regla opera en una oración gobernada por el operador Pf (paso 1) y la hipótesis de la subprueba epistémica es la misma oración sin el operador (paso 2). Note que el índice de la subprueba es Sf. En la referencia numérica se alude tanto a esta proposición inicial (paso 1) como a la subprueba. Hay que añadir a la fórmula que se saca de la subprueba (B) el operador Pf (como en $n + 1$).

Un ejemplo:

1		$\sim SfL \& \sim Sf\sim L$	**h**
2		$\sim Sf\sim L$	1 **ec**
3		PfL	2 **ps**
4	Sf	L	**h**
5		$L \vee G$	4 **id**
6		$Pf[L \vee G]$	3, 4-5 **ee**

Si Fulano no sabe si llueve, entonces, hasta donde sepa, es posible que llueva o granize. Hintikka ofrece aproximadamente esta prueba de $\sim Sf[p \ \& \sim Sfp]$ (véase arriba):

1	c	$Sf[p \ \& \sim Sfp]$	**h**
2		$p \ \& \sim Sfp$	1 **es**
3		$\sim Sfp$	2 **ec**
4		$Pf{\sim}p$	3 **ps**
5		Sf $\sim p$	**h**
6		$p \ \& \sim Sfp$	1 **i**
7		p	6 **ec**
		...	
		$\sim Sf[p \ \& \sim Sfp]$	1... **ing**

La contradicción aparece en los pasos 5 y 7.

5.5.4 Eliminación del operador de la compatibilidad doxástica

La regla eliminativa del creer es:

et: *eliminación del operador de la compatibilidad epistémica "con todo lo que Fulano cree"*

La regla, abreviada como **et**, también emplea una subprueba doxástica *hipotética*:

1	TfA		
2	Cf	A	
		...	
n		B	
$n + 1$	TfB		1, 2-n **et**

La regla opera en una oración gobernada por el operador Tf (paso 1) y la hipótesis de la subprueba doxástica es la misma oración sin el operador (paso 2). El índice de la subprueba es Cf. En la referencia numérica se alude tanto a esta oración inicial (paso 1) como a la subprueba. A la oración que se saca de la subprueba (B) hay que agregarle el operdor Tf (como en $n + 1$).

Una prueba en el contexto del problema de Moore:

1	c	$Cf[p \& \sim Cfp]$	**h**
2		Cf $p \& \sim Cfp$	1 **i**
3		$\sim Cfp$	2 **ec**
4		$Tf\sim p$	3 **tc**
5		Cf $\sim p$	**h**
6		$p \& \sim Cfp$	1 **i**
7		p	6 **ec**
		...	
		...	
		$\sim Cf\,[p \& \sim Cfp]$	1... **ing**

5.5.5 Cuadro epistémico-doxástico

El sistema formal del saber, pues, es distinto del del creer; pero son combinables. Podemos resumir la situación lógica en el siguiente cuadro doble de oposición:

Sfp		|		$Sf\sim p$
↘				↙
↓	Cfp	|	$Cf\sim p$	↓
$\boxed{p}$	↓	</>	↓	$\boxed{\sim p}$
↓	Tfp $(\sim Cf\sim p)$	v	$Tf\sim p$ $(\sim Cfp)$	↓
↙			↘	
Pfp $(\sim Sf\sim p)$		v		$Pf\sim p$ $(\sim Sfp)$

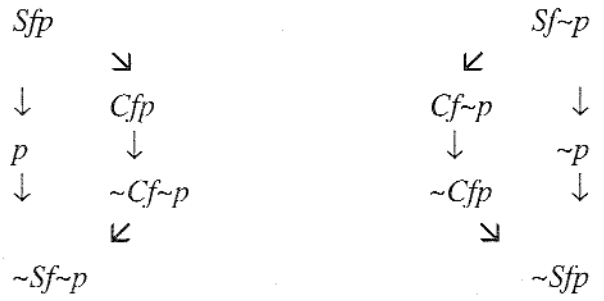
Se permiten, pues, las siguientes iteraciones en las subpruebas epistémicas (del saber), como en S4:

Sfp			$Sf\sim p$
	Cfp	$Cf\sim p$	

— con o sin el operador Sf y Cf

p			$\sim p$
	Tfp	$Tf\sim p$	
Pfp			$Pf\sim p$

Cuando se usa la lógica epistémica en la filosofía, generalmente es posible, y, en aras de la sencillez, aconsejable, prescindir de los operadores débiles, como en este cuadro:



* UNIDAD DE EJERCICIOS 35: LAS REGLAS **is**, **ic**, **ee**, **et**

A. Resuelva:

A1. $Sfp <> SfSfp$
A2. $Cfp > CfCfp$
A3. $Sf[p \& q] > Sfq$
A4. $Pf[p \& q] > Pfq$
A5. $[Cf[p > q] \& Cfp] > Cfq$
A6. $[Sf[p > q] \& Cfp] > Cfq$
A7. $[Pf[p > q] \& Sfp] > Pfq$
A8. $[Tf[p > q] \& Cf{\sim}q] > Tf{\sim}p$
A9. ${\sim}Sf[Sq \& {\sim}Cfq]$
A10. $Sfp > SfCfp$
A11. $Sfp > CfSfp$

B. Demuestre estos principios del cuadro (doble) de oposición epistémico:

B1. $Sfp > Cfp$
B2. $Cf{\sim}p > Tf{\sim}p$
B3. $Sfp > Pfp$
B4. ${\sim}Cf{\sim}p > Pfp$
B5. ${\sim}p > Pf{\sim}p$

C. Demuestre que:

C1. $[p \& q] \& {\sim}Sfq$ es epistémicamente inconsistente para Fulano.
C2. $Sf[[p \& q] \& {\sim}Sfq]$ es lógicamente inconsistente.
C3. $[p \& q] \& {\sim}Cfq$ es doxásticamente inconsistente para Fulano.
C4. $p \& {\sim}Cfp$ es epistémicamente inconsistente para Fulano.
C5. ${\sim}Sf[p \& {\sim}Cfp]$ es demostrable.

D. Explique con ayuda de los símbolos por qué la conjunción *p* & ~*Sfp*, si bien es epistémicamente inconsistente para Fulano, *no* le es doxásticamente inconsistente; e. d., no es contradictorio, p. ej., "creo tanto que Dios existe como que no sé que exista" (*Cf*[*D* & ~*SfD*).

E. Traduzca y resuelva:

E1. Si santa Teresa (*p*) sabe que Dios existe (*D*), también lo cree.
E2. Si Teresa sabe que Dios existe, entonces cree que lo sabe.
E3. Si Teresa sabe que Dios existe, entonces sabe que lo cree.
E4. Si Teresa sabe que Dios existe, entonces Marx no sabe que no existe.
E5. Si Marx sabe que Dios no existe, entonces es posible, hasta donde sepa santa Teresa, que no exista.
E6. Si Marx cree que Teresa sabe que Dios existe, entonces Marx cree que Dios existe.
E7. Si Marx cree que Teresa cree que Dios existe, entonces Marx cree que es compatible con todo lo que Teresa cree que Dios existe.
E8. Si Marx sabe si Dios existe (*SmD* v *Sm~D*) y sabe que es posible, hasta donde él sepa, que exista, entonces Dios existe.
E9. Si Marx sabe que Teresa cree que Dios existe, entonces es compatible con todo lo que Teresa cree que Dios exista.

F. Diga por qué son o no consistentes (son consistentes si no puede derivarse ninguna contradicción a partir de ellas):

F1. *Cm~D* & *SpD*
F2. *Cm~D* & *CpD*
F3. *Sm~D* & *SpD*
F4. ~*D* & *SpD*
F5. *Cm~D* & *D*

5.6 Pluralidad de los operadores epistémicos

En la lógica del saber todas las implicaciones relativas a la acumulación y simplificación de los operadores modales (4.9) serían demostrables. Sin embargo, ciertas implicaciones parecen ser indeseables; en particular, las permitidas sólo por S5: *PfSfp* > *Sfp* y *Pfp* > *SfPfp*. Si las omitimos tenemos las siguientes inferencias:

T y S4	>	*SfSfp* • *Sfp*	<	S4
T y S4	>	*Pfp* • *PfPfp*	<	S4
T y S4	>	*Sfp* • *PfSfp*		
T y S4	>	*SfPfp* • *Pfp*		

En la lógica doxástica, no podemos usar las reglas **en** e **ip**, y por ende habría que demostrar las implicaciones en S4 y S5. Sin embargo, se podrían demostrar con uso de S4 y S5, como se exhibe en este esquema:

S5	>	*CfCfp • Cfp*	<	S4
S5	>	*Tfp • TfTfp*	<	S4
S4	>	*Cfp • TfCfp*	<	S5
S4	>	*CfTfp • Tfp*	<	S5

Note que en la lógica modal (4.9) las implicaciones de la columna a la derecha salen en los sistemas indicados (S4 y S5), pero todas las implicaciones de la columna a la izquierda valen en T (por supuesto, en éste pueden usarse las reglas de vínculo con la verdad **en** e **ip**).

¿Cuáles inferencias deben ser excluidas por razones filosóficas? Snyder aprueba las dos primeras coimplicaciones y rechaza la tercera.[58] Por otro lado, Hintikka permite *Cfp* > *CfCfp* (válido en S4) y rechaza *CfCfp* <> *Cfp* (válido sólo en S5).[59] Si nos dejamos guiar por Hintikka y excluimos las inferencias de S5 (*p* < *q* se lee como "si *q*, entonces *p*"), obtenemos la siguiente lista:

		CfCfp • Cfp	<	S4
		Tfp • TfTfp	<	S4
S4	>	*Cfp • TfCfp*		
S4	>	*CfTfp • Tfp*		

Sintácticamente, esta estrategia para el saber y el creer afirma lo que ya estipulamos: se permite la iteración de S4, con los operadores o sin ellos (5.5.5). Hay que recordar sin embargo que la lógica doxástica no admite el sistema S4 sin más, porque en ella no vale el vínculo con la verdad.

* UNIDAD DE EJERCICIOS 36: REDUCCIÓN

A. Demuestre todas las implicaciones en esta sección.

B. Ofrezca razones filosóficas para apoyar la *invalidez* de las siguientes fórmulas en la lógica epistémica:

B1. *p* > *Sfp*
B2. *Cfp* > *Sfp*
B3. *CfCfp* > *Cfp*
B4. *Cfp* > *SfCfp*
B5. *Cfp* > *SfPfp*
B6. *~Sfp* > *Sf~Sfp*
B7. *p* > *SfPfp*
B8. *Cfp* > *p*
B9. *CfSfp* > *Sfp*
B10. *CfCfp* > *Cfp*
B11. *Pfp* > *SfPfp*

[58] P. 206.
[59] P. 123.

Capítulo 6

LÓGICA DEÓNTICA

6.0 Ubicación

En la lógica deóntica los operadores modales tienen el sentido ético del deber y del poder, de la obligatoriedad y licitud morales o del deber y del derecho (en al menos un sentido de esta última palabra). "Deóntico" se deriva del vocablo griego *deon*, "lo debido", *dei,* "hay que". Leibniz elaboró un sistema de la lógica deóntica que fue redescubierto por G. H. von Wright.[60]
Hay varias versiones de lógica deóntica, las cuales dependerán de las condiciones formales y del sentido que damos a los operadores. A veces el motivo de elegir un sistema particular es el deseo de evitar dificultades que surgen de ciertas paradojas, las cuales comentaremos adelante (14.4.5). Explicamos a continuación el sentido general de la lógica deóntica y presentamos las reglas de un sistema.

6.1 Símbolos de la lógica deóntica

6.1.1 Los operadores

Los operadores fuerte y débil de la lógica deóntica son:

Op: "es moralmente obligatorio que *p*", "debe ser el caso que *p*".

Lp: "es moralmente lícito, permisible, permitido, que *p*", "puede (*licet*) ser el caso que *p*", "hay derecho".

Como los operadores epistémicos, los deónticos corresponden de manera general a los modales:

Op	análogo a:	$\Box p$	*Sfp*	*Cfp*
Lp	análogo a:	$\Diamond p$	*Pfp*	*Tfp*

[60] En un artículo en *Mind*: "An Essay in Modal Logic, Amsterdam, 1951 y en *Logical Studies*, Londres, 1957; véase también H. Burkhardt (con referencia a O. Becker y G. Kalinow). Pp. 420 y ss.

Los operadores deónticos también son interdefinibles. P. ej., "es obligatorio no asesinar" ($O{\sim}A$) se toma como equivalente a "no es lícito asesinar" (${\sim}LA$). Aquí está el esquema de las coimplicaciones:

$$
\begin{array}{lcl}
Op & <> & {\sim}L{\sim}p \\
{\sim}Op & <> & L{\sim}p \\
O{\sim}p & <> & {\sim}Lp \\
{\sim}O{\sim}p & <> & Lp
\end{array}
$$

Se permite que estas inferencias se usen como una regla, abreviada **lo**; p. ej. (M: pagar más de lo justo):

1	${\sim}OM$	**h**
2	$L{\sim}M$	1 **lo**

La lógica deóntica también es parecida a la epistémica y a la modal porque podría desarrollarse usando sólo Op o sólo Lp. Permitimos el atajo de cambiar varios operadores a la vez, como por ejemplo:

1	${\sim}SfOp$	**h**
2	$PfL{\sim}p$	1 **ps**, **lo**.

También usaremos el símbolo:

> Vp: "es moralmente vedado, prohibido que", "no debe ser el caso que p", "no hay derecho"; se considera como definición:

$$Vp =_{df} {\sim}Lp$$

pues lo prohibido coincide con lo ilícito y con la obligación negativa:

$$
\begin{array}{lcl}
Vp & <> & {\sim}Lp \\
Vp & <> & O{\sim}p
\end{array}
$$

También se puede usar como regla ($\mathbf{r}_{df}$):

1	VA	**h**
2	${\sim}LA$	1 $\mathbf{r}_{df}$
3	$O{\sim}A$	1 $\mathbf{r}_{df}$

Lo que corresponde a la contingencia en la lógica deóntica, lo lícito no obligatorio (Lp & $L{\sim}p$ o Lp & ${\sim}Op$) puede abreviarse como Ip:

$$Ip =_{df} Lp \ \& \ L{\sim}p$$

y naturalmente se puede hacer la sustitución:

1	Lp	**h**
2	$L{\sim}p$	**h**
3	$Lp \,\&\, L{\sim}p$	1, 2 **ic**
4	Ip	3 $\mathbf{r}_{\mathbf{df}}$

6.1.2 La proposición deóntica

A diferencia de la lógica epistémica, en la deóntica que presentamos, los operadores no aluden a la persona (Fulano) sobre quien recae la obligación moral (pudiéramos haber desarrollado un sistema epistémico sin referirnos al que sabe y cree). Sin embargo, tendríamos la opción de formar un sistema que empleara una variable para el agente moral y, en este caso agregaríamos una letra (*f, m,* ...) a los operadores para denotar el agente: *Ofp*, *Lfp* y *Vfp*, "*p* es prohibido/ lícito/ prohibido para Fulano".

La entidad gobernada por los operadores ónticos puede tomarse por una situación o una proposición (u oración), y puede limitarse de varias maneras, p. ej., a los actos humanos. Se supondrá aquí que se trata de proposiciones. Podemos estipular, con Snyder,[61] que las verdades de la lógica no son moralmente obligatorias, pues si la obligación tiene analogía con la necesidad, todas las verdades de la lógica, paradójicamente, son "obligatorias" (14.4.5). Tenemos, en efecto, la opción de limitar el universo del discurso a las situaciones moralmente significativas; p. ej., en la escolástica se describía la situación moral como un complejo constituido por el acto u omisión, de las circunstancias moralmente relevantes y por la intención del agente. En este caso, no habría que aludir al agente como parte del operador (*Ofp*), porque el agente forma parte integrante de la proposición (*p*, en *Op*, *Lp*...). Hablaremos en este contexto de la combinación de operadores epistémicos y deónticos (14.4.4). Además, la lógica de la relevancia se ha aplicado a la deóntica (la "implicación moral") para evitar ciertos tipos de paradojas (1.1.4.4, 14.4.5).

La proposición puede ser "impersonal", como "es prohibido asesinar", *VA*; pero en este caso, "asesinar" debe tener un sentido proposicional que integre de alguna manera al responsable ético, como p. ej., *asesinar un hombre a otro* o *asesinar Fulano a Mengano*. Habrá muchas maneras de traducir las fórmulas al español; p. ej. (*J*: ser justo, *C*: castigar a los malhechores):

> *OJ*: "debe ser el caso que seamos justos", "es moralmente obligatorio (para los agentes morales), mandado, ser justo", "debemos ser justos", "hay que ser justo", "existe el deber de ser justo", "es según la virtud ser justo", etcétera.
>
> *LC*: "es moralmente lícito (para los agentes morales) castigar a los malhechores", "(les) es permitido castigarlos", "se puede castigarlos", "hay derecho de castigarlos", "no es contra la virtud castigarlos", etcétera.

Note que la expresión "no hay que" es ambigua. Cuando se dice "no hay que ayudar a todo mundo" el sentido puede ser ${\sim}OA$, pero "no hay que mentir" generalmente significa *VM* (*O*~*M*).

Cuando se incluye el agente moral, la traducción de los operadores deónticos puede variar. P. ej., donde *Dqd*: don Quijote defiende a Dulcinea:

[61] Pp. 198-201.

ODqd: "debe ser el caso que don Quijote defienda a Dulcinea", "es moralmente obligatorio, mandado, que la defienda", "don Quijote debe (de) defenderla", "tiene la obligación, el deber, de defenderla", "es virtuoso para él defenderla", etcétera.

LDqd: "es lícito que don Quijote defienda a Dulcinea", "don Quijote puede (moralmente) defender a Dulcinea", "a don Quijote le es permitido defenderla", "tiene el derecho de defenderla", "no es contra la virtud para él defenderla", etcétera.

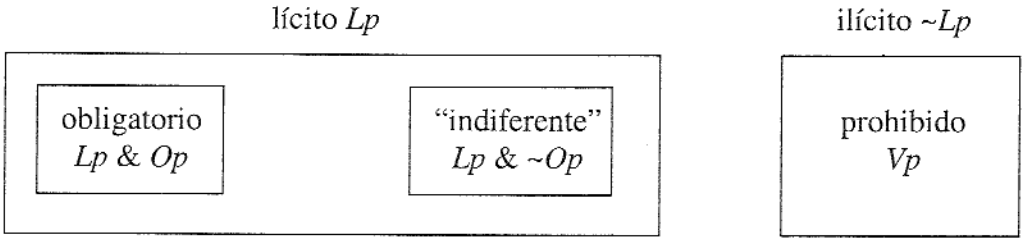
Los casos pueden ser más complejos, como "los adultos deben cuidar a los niños" ($Ux[Ax > OCx]$, "las mujeres y los niños pueden entrar primero en los botes salvavidas" ($Ux[[Mx \vee Nx] > LEx]$). Los verbos "poder" y "deber" ("debe", "debe de", "debiera", "debería"...) tienen muchos matices y en este contexto no se toma en cuenta los sentidos no morales (como en "mi papá debe de llegar a las cinco").

No hay que confundir la ética con el derecho en el sentido jurídico, o sea, con las leyes (codificadas o consuetudinarias). Con todo, el deber moral y la ley se relacionan en cierta manera (p. ej., se espera que las leyes sean moralmente justas). La lógica modal atañe principalmente a la ética, pero existen sistemas deónticos en que los operadores tienen un sentido legal. Tampoco hay que confundir la ética con la religión; se considera *jus* y *fas* (lo recto humano y divino) bajo la misma rúbrica. Puede pensarse que "no asesinarás" implica "debe ser el caso de que no asesines", pero el mandamiento incorpora categorías y tesis (p. ej., sobre la fundamentación de la moral) que van más allá de la lógica deóntica.

Ya que un principio fundamental de la lógica deóntica es que la obligación entraña la licitud:

$$Op > Lp$$

pero no al revés, podemos ilustrar las relaciones entre los operadores con la ayuda de este esquema:



Podemos desplegar las relaciones en un cuadro escolástico de oposición:

Op	|	$O{\sim}p$ (${\sim}Lp$, Vp)
↓	</>	↓
${\sim}O{\sim}p$ (Lp, ${\sim}Vp$)	v	${\sim}Op$ ($L{\sim}p$)
	Ip (Lp & $L{\sim}p$)	

Se ve que la indiferencia, lo que es lícito pero no obligatorio (Lp & $L{\sim}p$), corresponde a la contingencia modal (4.18). La palabra "indiferente" no significa precisamente "no moral", pues se define por operadores deónticos ("neutral" u "optativo" serían alternativas). En particular, un acto de la "caridad", e. d.,

de supererogación, hacer el bien más allá de la obligación (*Cp*: "es según la caridad que *p*") es "indiferente" en este sentido, por ser ni mandado ni prohibido. Sin embargo, el acto tendría una propiedad moral adicional, digamos *Cp* ("es según la caridad que *p*"), la cual no está incluida, pero cabría, en nuestro análisis. En este caso, vale el cuadro de oposición, pero tiene estos principios adicionales, donde *Bp*: "es bueno moralmente que *p*":

$$[Op \vee Cp] > Bp$$

y

$$Cp > Ip$$

La lógica deóntica, por ser lógica, prescinde de y conviene a las teorías éticas, sean éstas teológicas o deontológicas, sean de acto o de regla, objetivistas o relativistas, de la obligación o de la virtud, etcétera. (14.4.1).

Los pares "obligatorio/prohibido", "virtud/vicio", ...se asocian con otras categorías que indican los estados morales personales: "laudable/censurable", "loable/vituperable", "bueno/malo", "inocente/culpable", "virtuoso/vicioso". El siguiente esquema exhibe estas relaciones:

moralidad	*acción u omisión*	
	p	*~p*
Op	laudable	censurable
Vp	censurable	laudable
Ip	—	—

Por otro lado, según una tradición escolástica, la ética "objetiva" es mediada por lo subjetivo, e. d., por la lógica epistémica (14.4.4). Los dos aspectos, deóntico y epistémico, son factores en la "conciencia". Se trata de la "actitud" del agente hacia la moralidad (*CfOp*, *CfVp*, *CfIp*...), pues la cualidad ética laudable/censurable es determinable desde la perspectiva subjetiva. Tradicionalmente se ha insistido también en que la comisión u omisión se lleve a cabo voluntariamente, pues los dos requisitos tradicionales del "acto humano" son que se haga no sólo a sabiendas sino también adrede: involucrando así tanto entendimiento como voluntad.

* UNIDAD DE EJERCICIOS 37: TRADUCCIÓN

A. Traduzca al español (*q*: don Quijote, *Ex*: *x* enristra al barbero con el lanzón bajo, *Ax*: *x* arremete contra los molinos de viento, *Dx*: *x* defiende a Dulcinea, *Mx*: *x* es manchego, *P*: pagar los impuestos); (las proposiciones no tienen que ser correctas):

A1. *~OP*
A2. *O~P*
A3. *~LEq*
A4. *~VP*
A5. *LExDx*
A6. *Eq > LEq*

A7. $OP > OOP$
A8. $LP > LLP$
A9. $ODq \vee O{\sim}Dq$
A10. $O{\sim}Eq > {\sim}LEq$
A11. $OLp > Lp$
A12. $O[p \,\&\, q] > Op$
A13. $O[p \,\&\, Oq] > O[p \,\&\, q]$
A14. $ODq > O[Dq \vee Eq]$
A15. $ODq > Dq$
A16. $O\mathrm{U}x[Mx > Ax]$
A17. OMq
A18. $OSqMq$
A19. $OSfOP$
A20. $ODq > \Diamond Dq$
A21. ${\sim}[Op \,\&\, O{\sim}p]$
A22. $O{\sim}Eq > O{\sim}[Eq \,\&\, Dq]$
A23. $[Lp \,\&\, Lq] > Lp$
A24. $[Lp \,\&\, Lq] > L[p \,\&\, q]$
A25. $[Pp \,\&\, O[p > q]] > Pq$
A26. $\mathrm{I}Aq > L{\sim}Aq$
A27. $LP > [{\sim}OP > IP]$
A28. $LP > [O{\sim}P > P]$
A29. ${\sim}Ip > [Op \vee Vp]$
A30. $[{\sim}IEd \,\&\, [VEd > Dq] \,\&\, [OEd > Dq]] > Dq$

B. Escriba las formas equivalentes de estas expresiones (use, por ejemplo $\mathbf{r}_{\mathbf{df}}$):

B1. $L{\sim}p$
B2. $V{\sim}P$
B3. ${\sim}ODq$
B4. ${\sim}[{\sim}O{\sim}p \,\&\, {\sim}Op]$
B5. ${\sim}L{\sim}P$
B6. ${\sim}L{\sim}Dq$
B7. ${\sim}O{\sim}Aq$
B8. ${\sim}O{\sim}p \,\&\, {\sim}Op$
B9. $\Diamond V{\sim}Dq$
B10. ${\sim}Sf\Box O\mathrm{U}x[Mx > Dx]$
B11. ${\sim}IDq$
B12. IP
B13. $I{\sim}p$
B14. $Ip \,\&\, I{\sim}p$
B15. $ISfDq$

C. Traduzca las fórmulas de B.

D. Diga si le parecen correctas las fórmulas de A.

E. Formalice:

E1. No es prohibido pagar los impuestos.
E2. Don Quijote no sabe que no debe enristrar al barbero con el lanzón bajo.
E3. Si es obligatorio que Quijote arremeta contra los molinos de viento, entonces arremete contra ellos.
E4. Todo manchego debe defender a Dulcinea.
E5. Hay que pagar los impuestos.
E6. Si es obligatorio que don Quijote defienda a Dulcinea, entonces es obligatorio que la defienda o la asesine.
E7. Es obligatorio que el samaritano (s) no ayude a Dulcinea, quien sufre (Ds).
E8. Es prohibido que nadie (¡persona!) robe a Dulcinea.
E9. Es obligatorio que todo médico sepa que la penicilina cura el sarampión.
E10. Es obligatorio que hay que pagar los impuestos.
E11. Pagar los impuestos es moralmente indiferente.
E12. Es indiferente que Dulcinea enristre al barbero con el lanzón bajo.
E13. No es indiferente que don Quijote defienda a Dulcinea.
E14. Si no es indiferente pagar los impuestos, hay que pagarlos o es prohibido pagarlos.
E15. Si p es vedado u obligatorio, entonces p no es indiferente.

F. Resuelva:

F1. $\sim Op > L\sim p$
F2. $Ip > \sim Vp$
F3. $[Op > [p \,\&\, L\sim p]] > \sim Op$
F4. $[Oq \vee O\sim q] > [Lq > Oq]$
F5. $O\sim p > [Vp \vee Op]$
F6. $L\sim p <> \sim Op$
F7. $O\sim p <> \sim Lp$
F8. $LP > [\sim OP > IP]$
F9. $LP > [O\sim P > P]$
A10. $\sim Ip > [Op \vee Vp]$

G. Diga si el agente moral Fulano es "laudable", "censurable", "laudable o censurable" ("virtuoso" o "vicioso"), etc., en estas circunstancias, o ponga: "no viene al caso":

G1. Cuando Op, Fulano hace p.
G2. Cuando Vp, hace p.
G3. Cuando Op, no hace p (hace $\sim p$).
G4. Cuando Lp, hace p.
G5. Cuando $\sim Vp$, hace p.
G6. Cuando $\sim Vp$, no hace p.
G7. Cuando Ip, hace p.

G8. Cuando Ip, hace p.
G9. Cuando ~Ip, hace p.
G10. Cuando ~Ip, no hace p.

6.2 Secuentes subordinados deónticos

6.2.1 Los secuentes

La lógica deóntica, como la doxástica, no admite el vínculo con la verdad; la obligación de ser justo no implica que seamos justos (NO: $OJ > J$). Sin embargo, se podría hablar de la utopía moral, los mundos posibles en que existe el vínculo con la verdad (14.4.3), en los que se cumplen todas las obligaciones ($Op > p$) y son lícitas todas las acciones ($p > Lp$).

En la moralidad del mundo real al menos, pues, falta el vínculo con la verdad, y las únicas reglas que tendrá la lógica deóntica exigen el uso de subsecuentes, categóricos e hipotéticos. Las subpruebas deónticas corresponden a las subpruebas generales, estrictas y epistémicas, y sus reglas de introducción y eliminación corresponden a las de estos sistemas. El índice de las subpruebas epistémicas es O, pues se quiere garantizar en ellas la validez de lo que debe ser el caso. Tenemos, pues, este paralelismo (anticipamos las reglas deónticas):

x |	$\Box$ |	Sf |	Cf |	O |
— **icu**	— **in**	— **is**	— **ib**	— **io**
x |⊢	$\Box$ |⊢	Sf |⊢	Cf |⊢	O |⊢
— **ece**	— **ep**	— **ee**	— **et**	— **el**

6.2.2 La iteración

En las subpruebas deónticas pueden iterarse sólo las proposiciones gobernadas por el operador de la obligación. Pero hay que quitarlo el operador al iterarse una proposición, si se juzga razonable limitar la acumulación de los operadores deónticos, evitando así las inferencias como $OP > OOP$: "si debe ser el caso que se paguen los impuestos, entonces debe ser el caso que así deba ser el caso" (6.4). Tendríamos, pues, este tipo de iteración:

1	Op	**h**
2	O | p	1 **i**

Pero como Vp es abreviatura de la fórmula iterable $O{\sim}p$, se permite la iteración directa de la forma negativa, ~p:

1	Vp	**h**
2	O | ~p	1 **i**

La iteración de la lógica deóntica, o podría interpretarse así, es como en el sistema modal T (pero le faltan las reglas que corresponderían a **en** e **ip** en éste):

Op	$Vp, O{\sim}p$	— se quita el operador

$Lp, {\sim}O{\sim}p, {\sim}Vp$ $\qquad$ $L{\sim}p, {\sim}Op$

$Ip, Lp \ \& \ L{\sim}p$

* UNIDAD DE EJERCICIOS 38: SUBPRUEBAS DEÓNTICAS

A. Diga si las siguientes proposiciones pueden iterarse en la subprueba deóntica y si cómo se iteran:

A.1	Vp
A.2	${\sim}Vp$
A.3	Op
A.4	${\sim}Op$
A.5	Lp
A.6	${\sim}Lp$
A.7	${\sim}O{\sim}p$
A.8	$L{\sim}p$
A.9	$O[p \ \& \ q]$
A.10	$L[p \ \& \ q]$
A.11	$V{\sim}[p \vee q]$
A.12	${\sim}V[q > q]$
A.13	$Lp \ \& \ L{\sim}p$
A.14	${\sim}Op$
A.15	$O\mathrm{U}x[Gx > Fx]$
A.16	${\sim}L\mathrm{E}x[Fx \ \& \ Gx]$
A.17	$OS\mathrm{f}\mathrm{E}x[Gx > Fx]$
A.18	$\Box Vp$
A.19	$\Diamond Vp$
A.20	$Sf\Box Op$
A.21	Ip
A.22	${\sim}Ip$
O	¿?

6.3 Las reglas deónticas "io" y "el"

La regla deóntica introductoria:

io: *introducción del operador de la obligación*

La regla, abreviada como **io**, emplea una subprueba estricta *categórica*:

1	O | ...	
n	| A	
$n+1$	OA	1-n **io**

En la referencia numérica se alude a la subprueba. Un paso sacado de la subprueba (n) recibe el prefijo O. Por ejemplo:

1	Op	**h**
2	Oq	**h**
3	O | p	1 **i**
4	| q	2 **i**
5	| $p \& q$	3, 4 **ic**
6	$O[p \& q]$	3-5 **io**

Como en la lógica doxástica, no parece posible producir una contradicción en el secuente que corresponde a la **ing**. Un ejemplo es la prueba de que si p es obligatorio, entonces no lo es no p:

1	Op	**h**
2	| $O{\sim}p$	**h**
3	| O | p	1 **i**
4	| | ${\sim}p$	2 **i**
	| <—— ¿?	
	${\sim}O{\sim}p$	(**ing**)

La razón es que todo lo que se saque de la subprueba deóntica tiene que recibir el prefijo O, el cual no puede quitarse por faltar el vínculo con la verdad. Pero podría asumirse como axioma o supuesto ${\sim}O\wedge$: el absurdo no es obligatorio ($\wedge$ podría ser, p. ej., $p \& {\sim}p$); p. ej., no es obligatorio iniciar la revolución y no iniciarla. En este caso se podría sacar $O[p \& {\sim}p]$ de la subprueba y agregar un supuesto de la exclusión de la contradicción para obtenerla:

1		Op	**h**
2	c	$O{\sim}p$	**h**
3		O p	1 **i**
4		${\sim}p$	2 **i**
5		p & ${\sim}p$	3, 4 **eng**
6		$O[p$ & ${\sim}p]$	3-5 **io**
7		${\sim}O[p$ & ${\sim}p]$	supuesto
8		${\sim}O{\sim}p$	2-7 **ing**

La regla deóntica eliminativa es:

el: *eliminación del operador de la licitud*

La regla, abreviada como **el**, emplea una subprueba doxástica *hipotética*:

1		LA	
2	O	A	
		...	
n		B	
$n + 1$		LB	1, 2-n **el**

La regla opera en una oración gobernada por el operador L (paso 1) y la hipótesis de la subprueba deóntica es la misma oración sin el operador (paso 2). El índice de la subprueba es O. En la referencia numérica se alude tanto a esta oración inicial (paso 1) como a la subprueba. Hay que agregar el operador L a la oración (B) que se saque de la subprueba (como en $n + 1$).

* UNIDAD DE EJERCICIOS 39: LAS REGLAS **io**, **el**

A. Resuelva estas pruebas "paradójicas" (ver la semántica 14.4.5):

A1. $Op > O[p \vee q]$
A2. $[O[p \vee q]$ & $Vq] > Op$
A3. $Vp > O[p > q]$
A4. $Oq > O[p > q]$
A5. $O[p \vee {\sim}p]$
A6. $O[Ffm$ & $Gzm] > OGzm$
A7. $VFfm > V[Gzm$ & $Ffm]$
A8. $[Ffm$ & $VFfm$ & $O[Gf <> Ffm]] > [Ffm$ & $VGf]$
A9. $[Ff > OSfp] > [Ff > Op]$

B. Establezca todas las implicaciones en 6.2.3, suponiéndose que se permite la acumulación de operadores.

6.4 Pluralidad de los operadores deónticos

Un efecto de quitar el operador deóntico de las fórmulas que se iteren en una subprueba deóntica es el bloqueo de la acumulación de los operadores (6.2.2). P. ej., no tenemos $Op > OOp$ (pero, sí, $\Box p > \Box\Box p$, $Sfp > SfSfp$ y $Cfp > CfCfp$, etc.). Pueden excluirse, si se desea, las fórmulas que contienen operadores deónticos amontonados. Esta restricción simplifica la interpretación filosófica de las proposiciones deónticas.

Otros sistemas deónticos (los cuales tampoco admiten el vínculo con la verdad), como uno que Snyder presenta,[62] permiten las siguientes equivalencias. Lo que puede ser usando las iteraciones aceptadas en S4 y S5 (sin usar las reglas que permiten el vínculo con la verdad):

S5	>	$OOp \bullet Op$	<	S4
S5	>	$Lp \bullet LLp$	<	S4
S4	>	$Op \bullet LOp$	<	S5
S4	>	$OLp \bullet Lp$	<	S5

Así se demuestran dos implicaciones permitidas en S5:

1	Lp	**h**
2	$O \mid Lp$	1 **i** (S5)
3	OLp	2 **io**

1	LOp	**h**
2	$c \vdash \sim Op$	**h**
3	LOp	1 **i**
4	$O \mid \sim Op$	2 **i** (S5)
5	$O \sim Op$	4 **io**
6	$\sim LOp$	5 **lo**
7	Op	2-6 **ing**

* UNIDAD DE EJERCICIOS 40: REDUCCIÓN

A. Demuestre las implicaciones en esta sección.

B. Comente el sentido filosófico de estas inferencias.

[62] Pp. 192-198.

Capítulo 7

LÓGICA TEMPORAL

7.0 Ubicación

Algunas proposiciones como 2 + 3 = 5 se han llamado "atemporales" por no referirse al tiempo (véase sin embargo 7.1.3). Otras involucran la noción del tiempo, y son éstas el tema especial de la lógica temporal.

Hay varias aproximaciones lógicas al tiempo. Se podría considerar que cada proposición temporalmente fijable incluye una referencia al tiempo (o que cada proposición ubicable local y temporalmente entraña cuatro coordenadas: tres espaciales y una temporal). p. ej., la proposición expresada por: "César cruzó el Rubicón" alude no sólo a cierto lugar sino a cierto momento (en 49 a.C.). Las fórmulas pueden incluir constantes y variables para el tiempo; "Cervantes murió en 1616" podría escribirse así: Mc_{1616} (en este caso el pasado "murió" es indicado no por M en Mxy sino por y). Las expresiones también serían cuantificables: $Ex[Tx \ \& \ Mcx]$: "Cervantes murió en el siglo XVII" (Tx: es x momento en el siglo XVII). Quine quiere formalizar los tiempos gramaticales cuantificando los espacios del tiempo. P. ej., "Napoleón se rindió" se traduciría como:

$$Ex[Ax \ \& \ Rnx]$$

donde Ax significa que x es una "época espaciotemporal" antes del momento actual y Rnx significa "rendirse Napoleón en x". Expresa el tiempo futuro de manera análoga.

Tales soluciones tienen el efecto de "destemporalizar" el lenguaje en el sentido de que meten el tiempo en la proposición sin anclar la oración al tiempo. Tales procedimientos carecen de enfoque modal. Los sistemas modales del tiempo usan operadores modales (en el sentido formal general) que reciben interpretaciones temporales como "siempre" o "futuro". Presentaremos unos sistemas como introducción y después examinaremos aquellos en que se emplean los operadores usuales para el pasado y el futuro.

7.1 Bosquejos previos

7.1.1 Un sistema diodórico

En algunos sistemas temporales el pasado y porvenir se desarrollan por separado (7.2). En un sistema "diodórico", llamado así porque fue discutido por Diódoro Crono, el pasado se considera fijo y los

operadores tienen el sentido de "es (ahora) y siempre será el caso que *p*" y "es (ahora) o será el caso que *p*"; usamos en este párrafo los símbolos *AGp* y *AFp*.[63] Se asume que las proposiciones del pasado incluyen la referencia temporal; p. ej., *AGC*, es y siempre será el caso que César cruzó el Rubicón en 44 a.C. *AGp* y *AFp* corresponden, respectivamente, a los operadores modales fuerte y débil y S4 es el sistema indicado.

1	*C*	**h**
2	*AFC*	1, análogo a **ip**,

si César cruzó el Rubicón en 44 a.C., es o será el caso que lo cruzó entonces.

1	*AGC*	**h**
2	*AG* | *AGC*	1 **i** (S4)
3	*AGAGC*	2 **in**

si es y siempre será el caso que César cruzó el Rubicón en 44 a.C., entonces es y siempre será el caso que es o será V que lo cruzó entonces.

7.1.2 Un cuadro escolástico

Los escolásticos también desarrollaron lógicas temporales. Podríamos formar un cuadro de oposición usando el simbolismo sugerido por E. A. Moody (omitimos la expresión del compromiso existencial de las fórmulas universales).[64] Aquí "*P*" es el operador que marca el pasado, y las fórmulas que no lo tienen valen del presente:

U*x*[[*Ix* v *PIx*] > *PJx*] todo *I* era *J*	U*x*[[*Ix* v *PIx*] > ~*PJ*] ningún *I* era *J*
E*x*[[*Ix* v *PIx*] & *PJx*] algún *I* era *J*	*x*[[*Ix* v *PIx*] & ~*PJx*] Algún *I* no era *J*.

El cuadro del futuro tiene *F* en vez de *P*; p. ej., U*x*[[*Ix* v *FIx*] > *FJx*] representa "todo *I* será *J*". Los escolásticos comentaban el paralelismo entre las oraciones modales aléticas y las temporales. Ejemplos serían las oraciones representables como "cualquier cosa que es o era animal es mortal" y "cualquier cosa que es o puede ser animal es mortal":

U*x*[[*Ax* v *PAx*] > *PMx*]
U*x*[[*Ax* v ◊*Ax*] > ◊*Mx*]

[63] El sistema es de A. N. Prior, *Time and Modality*, 1957; *Past, Present and Future*, 1968, repasado en Snyder, p. 191.

[64] *Truth and Consequence in Medieval Logic*, 1953.

El último ejemplo es la pauta del análisis *de re* de las oraciones modales del Pseudoescoto y de Buridano: los sujetos son entes posibles con historias posibles (9.2.2).

7.1.3 "Siempre" y "alguna vez"

Los operadores de un sistema sencillo de A. N. Prior son "siempre", "alguna vez" (o "algunas veces" o más estrictamente: "al menos una vez") y "nunca". Empleamos estos símbolos en esta sección:

p: "*siempre* es el caso que *p*"
Qp: "*a veces* (en latín: *quandoque*) es el caso que *p*"
Np: "*nunca* es el caso que *p*"

Puesto que aquello que siempre es no es ninguna vez (permitiéndose así la fuerza de la doble negación), y aquello que es alguna vez no es nunca, tenemos las usuales interdefiniciones:

$$Sp =_{df} \sim Q \sim p$$
$$Qp =_{df} \sim S \sim p$$

y las equivalencias:

$$Sp \quad <> \quad \sim Q \sim p$$
$$\sim Sp \quad <> \quad Q \sim p$$
$$S \sim p \quad <> \quad \sim Qp$$
$$\sim S \sim p \quad <> \quad Qp$$

las cuales podemos usar como regla (**qs**). "Nunca", *N*, se define así:

$$Np =_{df} S \sim p \ (\sim Qp)$$

Indicaríamos el tiempo presente simplemente sobreentendiendo que una oración sin operador temporal es V actualmente; p. ej., *QT*: "algunas veces tiembla la tierra" (*T*: "la tierra está temblando").

Es evidente la semejanza entre estos operadores temporales y la modalidad y cuantificación (*Sp*: $\Box p$ y U*xp*; *Qp*: $\Diamond p$ y E*xp*). En este sistema temporal vale el vínculo con la verdad:

$$Sp > p$$

"si siempre *p*, entonces *p*" y

$$p > Qp$$

"si *p*, entonces alguna vez *p*", y podríamos hacer reglas correspondientes ("**esm**" e "**iq**"). También son teoremas:

$$Sp > Qp$$
$$\sim Qp > \sim Sp$$

$\sim Qp > \sim p$
$Q\sim p <> \sim Sp$
$Qp \vee Q\sim p$
$\sim[Sp \ \& \ S\sim p]$

Tenemos, pues, este cuadro de oposición:

Sp	|	Np ($\sim Qp$, $S\sim p$)
↓		↓
$\boxed{p}$	</>	$\boxed{\sim p}$
↓		↓
Qp ($\sim Np$)	v	$Q\sim p$ ($\sim Sp$)
	$Qp \ \& \ Q\sim p$	

El sistema S4 vale en esta lógica; por ejemplo:

1	Sp	**h**
2	$S \mid Qp$	1 **i** (S4)
3	SSp	2 análogo con **in**

pues si siempre es el caso que p, entonces siempre es el caso que siempre es el caso que p. Si bien se ha sugerido que S5 es aplicable, no parecen válidas las fórmulas de Barcan; p. ej. (Mx: x volará a Marte):

$QExMx > ExQMx$

pues no parece seguirse que si alguna vez alguien irá (va, fue) a Marte, ahora exista alguien que alguna vez irá (va, fue) a Marte.[65]

El sistema (y otros sistemas en que "siempre" es expresable) es aplicable a las proposiciones atemporales como 2 + 3 = 5, pues, como observaron los escolásticos, dos más tres "siempre" son cinco. En efecto, entre los griegos existía una interpretación "estadística" de modalidad alética en la que los modos reciben definiciones temporales (9.1):

- p: es el caso que p
- $\Diamond p$: es o era o será el caso que p
- $\Box p$: es y era y será el caso que p

[65] Snyder, p. 190.

* UNIDAD DE EJERCICIOS 41: "SIEMPRE" Y "ALGUNA VEZ"

A. Demuestre en el sistema escolástico (7.1.2) que $Ux[[Ax \vee \Diamond Ax] > \Diamond Mx]$ implica, pero no es implicada por $Ax > \Diamond Mx$.

B. Formalice en el sistema de "siempre" y "alguna vez" (7.1.3):

B1. Siempre hay materia.
B2. Si don Quijote nunca está enamorado de Dulcinea, entonces a veces no está enamorado de ella.
B3. A veces llueve y a veces no llueve.
B4. Llueve pero no nieva nunca.
B5. Alguna vez habrá justicia.

C. Traduzca al español y resuelva estas fórmulas (7.1.3):

C.1 $Sp > Qp$
C.2 $\sim Qp > \sim Sp$
C.3 $\sim Qp > \sim p$
C.4 $Qp \vee Q\sim p$
C.5 $\sim[Sp \,\&\, S\sim p]$

7.2 Un sistema del pasado y del futuro

Se ha elaborado un conjunto de sistemas que emplean operadores de los tiempos pasado y futuro; presentaremos una versión que combina varios de ellos.[66]

7.2.1 Símbolos y definiciones

El sistema contiene y relaciona dos subsistemas paralelos, uno del pasado y otro del futuro. Emplea estos operadores primitivos:

Pp: era (fue, ha sido) el caso que *p*
Fp: será (ha de ser, va a ser) el caso que *p*.[67]

[66] Consúltese R. P. McArthur, *Tense Logic*, 1976. El sistema mínimo es K_t, (E. J. Lemmon); otros sistemas son extensiones de éste (a diferencia de éstas, K_t no presupone ninguna teoría de la sucesión temporal). El resultado de admitir el axioma de la transitividad $FFp > Fp$ (S4) y los dos axiomas que estorban la bifurcación hacia la izquierda y derecha es el sistema lineal *CL* (N. B. Cochiarella). Como ampliaciones lineales de *CL* obtenemos el sistema infinito *SL*, si se usa el supuesto para excluir la contradicción (4.8), y el sistema denso *SL* si se admite S5. Si a *CL* no se agregan los dos axiomas que evitan la bifurcación, tenemos el sistema *CR*, ramificado hacia el pasado y el futuro; si se suprime la bifurcación hacia la izquierda obtenemos K_b, ramificado sólo hacia el futuro; el sistema *OT* es una versión de K_b. El presentado aquí admite el supuesto y S4; y si se desea, pueden añadirse los axiomas para una u otra bifurcación.

[67] Note que *P* es ambiguo, porque también es un operador epistémico. En la práctica no se confunden porque el epistémico es seguido por un símbolo individual (*Pfp*), mientras el temporal es seguido por un símbolo proposicional (*Pp*). "Ha sido el caso que *p*" no debe uno implicar que *p* sea V ahora.

Se sobreentiende que un símbolo proposicional que carezca de un operador temporal alude al tiempo presente.[68] Otros tiempos también son representables porque se permite ciertas acumulaciones de los operadores temporales. Ejemplos (*L*: llover):

L: llueve, está lloviendo, llueva...
PL: llovió, llovía, ha llovido, lloviera,estuvo, estaba lloviendo...
FL: lloverá, estará lloviendo, va a llover, ha de llover, lloviere...
PPL: había llovido, hubo llovido, había estado lloviendo, hubiese llovido...
FPL: habrá llovido...
PFL: llovería...
FFL: será el caso que lloverá.

Observe que todas estas expresiones menos la última corresponden a los tiempos del verbo español y además que una fórmula puede tener varias traducciones al lenguaje ordinario. Ejemplos son el pretérito, perfecto e imperfecto, formas morfológicas que también indican "aspectos" verbales (p. ej., instantáneo/continuo), los cuales no será necesario tomar en cuenta en la formalización lógica.

Ahora introducimos los operadores *Hp*, "siempre ha sido el caso que *p*" y *G*, "siempre será el caso que *p*". *H* y *G* son los operadores fuertes y *P* y *F*, los débiles; por lo tanto son interdefinibles:

$Hp =_{df} \sim P \sim p$
$Gp =_{df} \sim F \sim p$

Por ejemplo, que siempre lloverá equivale al hecho de que no será el caso que no llueve. Tenemos las equivalencias normales:

Hp	<>	$\sim P \sim p$
$\sim Hp$	<>	$P \sim p$
$H \sim p$	<>	$\sim Pp$
$\sim H \sim p$	<>	Pp
Gp	<>	$\sim F \sim p$
$\sim Gp$	<>	$F \sim p$
$G \sim p$	<>	$\sim Fp$
$\sim G \sim p$	<>	Fp

las cuales podemos usar como reglas "**ph**" y "**fg**", como en el siguiente ejemplo en que tomamos el atajo (2.3.8):

1	$\sim PFL$	**h**
2	$H \sim FL$	1 **ph**
3	$HG \sim L$	2 **fg**

[68] Puede usarse un operador del tiempo presente, *A* ("ahora") para quitar la ambigüedad dentro del alcance de otro operador temporal. P. ej., *PAFL*: era V (entonces) que (desde ahora) temblará la tierra, y *PFAL*: era V (entonces) que (ahora) temblaría la tierra.

Naturalmente se podría desarrollar el sistema del pasado sólo con P o H y el del futuro sólo con F o G.

Observe la diferencia en estos pares:

$\sim PL$ ($H\sim L$): nunca llovió (ha llovido)
$P\sim L$ ($\sim HL$): no llovió (en al menos algún momento)

y

$\sim FL$ ($G\sim L$): nunca lloverá
$F\sim L$ ($\sim GL$): no lloverá (en algún momento)

Se puede expresar "siempre p" y "nunca p" como:

$Hp \,\&\, p \,\&\, Gp$
$\sim Pp \,\&\, \sim p \,\&\, \sim Fp$

pues, en el primer caso, p ha sido, es y seguirá siendo V.

* UNIDAD DE EJERCICIOS 42: TIEMPOS

A. Traduzca estas oraciones al simbolismo del sistema mínimo (N: estar nublado; S: haber sol; C: $2 + 2 = 4$).

A1. Estará nublado y no habrá sol nunca.
A2. Ni está ni estará nublado.
A3. Hubo sol, hay y seguirá habiendo.
A4. Dos más dos siempre son cuatro.
A5. Siempre ha estado nublado pero hay sol ahora.
A6. Si siempre habrá sol, entonces habrá sol (una vez).
A7. Sé que hay sol y creo que estará nublado.
A8. Era V que habría sol.
A9. Habrá sol y habrá estado nublado.
A10. Había estado nublado.

B. Resuelva:

B1. $PL > \sim G\sim L$
B2. $[\sim PL \,\&\, F\sim L] > [\sim GL \,\&\, H\sim L]$
B3. $[HD \,\&\, D \,\&\, GD] > [\sim P\sim D \,\&\, D \,\&\, \sim F\sim D]$
B4. $[[GL > L] \,\&\, \sim L] > F\sim L$
B5. $[Cf\sim PL \,\&\, SfL] > Cf[G\sim L \,\&\, L]$

C. Traduzca las fórmulas de B al español (L: llover; C: $2 + 2 = 4$).

7.2.2 Vínculo con la verdad y las reglas "ihf" e "igp"

En las lógicas temporales se excluye el vínculo con la verdad, porque en este contexto una fórmula no regida por ningún operador se toma por presente (u otro momento considerado como "ahora"). No hay, pues, reglas análogas a las modales **en** e **ip**; es evidente que estas implicaciones son F:

NO $Hp > p$ — si siempre ha llovido, entonces llueve ahora
$Gp > p$ — si siempre lloverá, entonces llueve ahora
$p > Pp$ — si llueve ahora, entonces llovió
$p > Fp$ — si llueve ahora, entonces lloverá

Sin embargo, hay una especie de vínculo con la verdad, cuando "se cruza" el presente en dos rumbos: del pasado al futuro (**ihf**) y del futuro al pasado (**igp**). Estas temporalidades corresponden, aproximadamente, al perfecto futuro y al condicional del verbo español y se consignan en estas reglas:

1	A	**h**
2	HFA	1 **ihf**

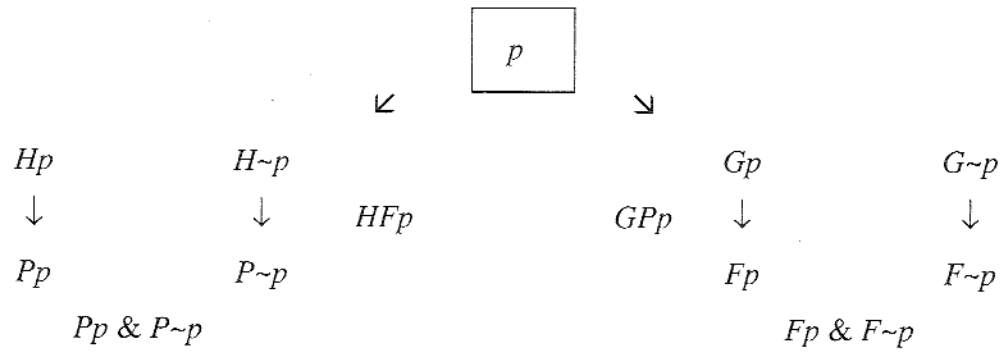
1	A	**h**
2	GPA	1 **igp**

Un ejemplo:

1	L	**h**
2	GPL	1 **igp**
3	HFL	1 **ihf**
4	GPL & HFL	2, 3 **ic**

Si llueve ahora, entonces siempre habrá llovido (siempre será el caso que ha llovido) y siempre era el caso que llovería. No hay inferencias paralelas en los otros tipos de modalidad (p. ej., no tenemos, $p > SfTfp$). En la próxima sección permitiremos un tipo de iteración que hará superfluas estas reglas.

El cuadro de oposición es doble, porque combina el pasado con el futuro (p representa la actualidad):



En cuanto a las conjunciones "contingentes", Pp & $P{\sim}p$ significa que fue V que p alguna vez (algunas veces) pero no siempre en el pasado y Fp & $F{\sim}p$ que será V que p, pero no lo será siempre. Naturalmente $H{\sim}p$ equivale a ${\sim}Pp$, $P{\sim}p$ a ${\sim}Hp$, $G{\sim}p$ *a* ${\sim}Fp$ y $F{\sim}p$ a ${\sim}Gp$.

7.2.3 Subsecuentes e iteración

Las reglas temporales incluyen subpruebas temporales —o "de siempre en el pasado" y "de siempre en el futuro"—; las llamaremos, respectivamente, "del pasado" y "del futuro". Hay subpruebas categóricas e hipotéticas. A ellas se extiende el paralelismo que se ha notado en los otros sistemas (anticipamos las reglas temporales):

x | — **icu**	$\Box$ | — **in**	Sf | — **is**	Cf | — **ib**	O | — **io**	H | — **ih**	G | — **ig**
x ⊢ — **ece**	$\Box$ ⊢ — **ep**	Sf ⊢ — **ee**	Cf ⊢ — **et**	O ⊢ — **el**	H ⊢ — **eh**	G ⊢ — **ef**

En el sistema pueden iterarse las proposiciones regidas por el operador H en una subprueba del pasado y las regidas por el operador G en una del futuro, p. ej., si se itera como en T, quitando los operadores:

1	Hp	**h**	1	Gp	**h**
2	H | p	1 **i**	2	G | p	1 **i**

Si preferimos eliminar las reglas **ihf** e **igp**, podríamos permitir la iteración de proposiciones en las subpruebas con tal que se les agregue F en las subpruebas del pasado y P en las del futuro:

1	p	**h**	1	p	**h**
2	H | Fp	1 **i**	2	G | Pp	1 **i**

Evidentemente, podemos obtener el efecto de las reglas **ihf** e **igp** con la ayuda de las reglas **ih** e **ig**, las cuales introduciremos después (7.2.4):

1	p	**h**	1	p	**h**
2	H | Fp	1 **i**	2	G | Pp	1 **i**
3	HFp	2 **ih**	3	GPp	2 **ig**

Tenemos el siguiente cuadro de oposición, donde la iteración de p y ${\sim}p$ es especial: al iterarlas hay que agregar los operadores F y P en los casos de subpruebas H y G, respectivamente.

Hp	*H~p*		*Gp*	*G~p*	
p	*~p*	— AÑÁDASE *F*	*p*	*~p*	— AÑÁDASE *P*
Pp	*P~p*	*Fp*		*F~p*	

* UNIDAD DE EJERCICIOS 43: ITERACIÓN

A. Diga si cada una de las siguientes proposiciones puede iterarse en una subprueba temporal y, de ser así, si se puede en una subprueba del pasado o del futuro y diga también cómo se hace:

1	*p*
2	*Fp*
3	*~Fp*
4	*~Pp*
5	*Gp*
6	*Hp*
7	*~Gp*
8	*~Hp*
9	*HFp*
10	*FHp*
11	*~FFp*
12	*G~Hp*
13	*G*[*p* & *q*]
14	[*p* & *q*]
15	*Gp* & *Hq*
H	¿?
G	¿?

7.2.4 Reglas de los subsecuentes

La regla introductoria "siempre en el pasado":

ih: *introducción del operador de "siempre en el pasado"*

La regla, abreviada como **ih**, emplea una subprueba *categórica* del pasado:

1	H | ...	
n	| A	
$n+1$	HA	1-n **ih**

En la referencia numérica se alude a la subprueba. Al sacarse un paso de la subprueba (n), tiene que recibir el prefijo H.

El siguiente teorema servirá como ejemplo:

1	$H[p > q]$	**h**
2	Hp	**h**
3	H | p	2 **i**
4	| $p > q$	1 **i**
5	| q	3, 4 **mp**
6	Hq	3-5 **ih**
7	$Hp > Hq$	2-6 **ii**
8	$H[p > q] > [Hp > Hq]$	1-7 **ii**

Como en la lógica doxástica y deóntica, no parece posible en la temporal (ni del pasado ni del futuro) producir una contradicción en el secuente que corresponde a la **ing**:

1	Hp		**h**
2	c | $\sim Pp$		**h**
3	$H\sim p$		2 **fg**
4	H | p		1 **i**
5	| $\sim p$		3 **i**
6	| ¿?		
		—¿?	**(ih)**
	Pp		**(ing)**

Usamos la misma opción que en las lógicas doxásticas y deónticas cuando asumíamos supuestos axiomáticos para excluir la contradicción ($\sim Cf\wedge$, $\sim O\wedge$); en el presente caso: $\sim H\wedge$ (4.8).[69] La prueba sería:

[69] Parece que así se distingue entre K_t y SL.

1	Hp	**h**
2	$c \mid \sim Pp$	**h**
3	$H\sim p$	2 **fg**
4	$H \mid p$	1 **i**
5	$\sim p$	3 **i**
6	$\wedge$	4, 5 **eng**
7	$H\wedge$	4-6 **ih**
8	$\sim H\wedge$	supuesto
9	Pp	2-8 **ing**

Pues si p era el caso siempre en el pasado, fue el caso una o varias veces.

El siguiente ejemplo muestra el uso de la iteración especial:

1	PGp	**h**
2	$\sim p$	**h**
3	$H \mid F\sim p$	1 **i** (especial)
4	$\sim Gp$	3 **fg**
5	$H\sim Gp$	3-4 **ih**
6	$\sim PGp$	5 **ph**
7	PGp	1 **i**
8	p	2-7 **ing**

El sentido es: si en el pasado fue V que p sería V siempre, entonces p es V ahora.

La regla correspondiente del futuro funciona de la misma manera:

ig: *introducción del operador "siempre futuro"*

La regla, abreviada como **ig**, emplea una subprueba *categórica* del futuro:

1	G	...
n		A
$n+1$	GA	1-n **ig**

En la referencia numérica se alude a la subprueba. Al sacarse un paso de la subprueba (n), tiene que recibir el prefijo G. Los teoremas de arriba servirán como ejemplos, pero con cambio de los operadores:

$G[p > q] > [Gp > Gq]$
$FHp > p$

También podemos usar el supuesto que corresponde al futuro: $\sim G \wedge$. Un ejemplo:

1		$\sim Fp$	**h**
2		$G\sim p$	1 **fg**
3	c	$\sim F\sim p$	**h**
4		Gp	3 **fg**
5		G $\sim p$	2 **i**
6		p	4 **i**
7		$\wedge$	5, 6 **eng**
8		$G\wedge$	5-7 **ig**
9		$\sim G\wedge$	supuesto
10		$F\sim p$	3-9 **ing**

si no será V que p, entonces será el caso que no p.

La regla eliminativa del pasado:

epa: *eliminación del operador del pasado*

La regla, abreviada como **epa**, emplea una subprueba *hipotética* del pasado:

1		PA	
2	H	A	**h**
		...	
n		B	
$n+1$		PB	1, 2-n **epa**

La regla opera en una oración gobernada por el operador P (paso 1) y la hipótesis de la subprueba del pasado es la misma fórmula sin el operador (paso 2). El índice de la subprueba es H. En la referencia numérica se alude tanto a esta oración inicial (paso 1) como a la subprueba. La fórmula que se saque de éste (B) debe recibir el prefijo P (como en $n + 1$).

Otro teorema del sistema mínimo servirá como ejemplo:

1		$H[p > q]$	**h**
2		Pp	**h**
3	G	p	**h**
4		$p > q$	1 **i**
5		q	3, 4 **mp**
6		Pq	2, 3-5 **epa**
7		$Pp > Pq$	2-6 **ii**
8		$H[p > q] > [Pp > Pq]$	1-7 **ii**

La regla correspondiente del futuro es:

ef: *eliminación del operador del futuro*

La regla, abreviada como **ef**, emplea una subprueba *hipotética* del futuro:

1	FA		
2	G | A		**h**
	...		
n	B		
$n + 1$	FB		1, 2-n **ef**

La regla opera en una oración gobernada por el operador F (paso 1) y la hipótesis de la subprueba del futuro es la misma fórmula sin el operador (paso 2). El índice de la subprueba es G. En la referencia numérica se alude tanto a esta oración inicial (paso 1) como a la subprueba. La fórmula que se saque de la subprueba (B) debe recibir el prefijo P (como en $n + 1$).

Usamos como ejemplo el mismo teorema de arriba con G y F en vez de H y P:

$G[p > q] > [Fp > Fq]$

7.2.5 Pluralidad de operadores

En cuanto a la acumulación y simplificación de los operadores temporales, desde una perspectiva formal esperamos ver la siguiente disposición de las fórmulas relativas al futuro, y agregamos las inferencias que exigen el supuesto. Un esquema parecido podría hacerse para el pasado.

S5	>	GGp	• Gp	<	S4
S5	>	Fp	• FFp	<	S4
supuesto S4	>	Gp	• FGp	<	S5 supuesto
supuesto S4	>	GFp	• Fp	<	S5 supuesto

En la lógica temporal, la elección en torno a estas opciones tiene también consecuencias filosóficas importantes (7.3, 14.5.1).

* UNIDAD DE EJERCICIOS 44: LAS REGLAS **ih, ig, epa, ef**

A. Resuelva:

A1. $FHp > p$
A2. $G[p > q] > [Gp > Gq]$
A3. $G[p > q] > [Fp > Fq]$
A4. $[Gp \vee Gq] > G[p \vee q]$
A5. $F[p \& q] > [Fp \& Fq]$
A6. $G[p \& q] <> [Gp \& Gq]$
A7. $F[p \vee q] <> [Fp \vee Fq]$
A8. $[Hp \vee Hq] > H[p \vee q]$
A9. $P[p \& q] > [Pp \& Pq]$
A10. $P[p \vee q] <> [Pp \vee Pq]$

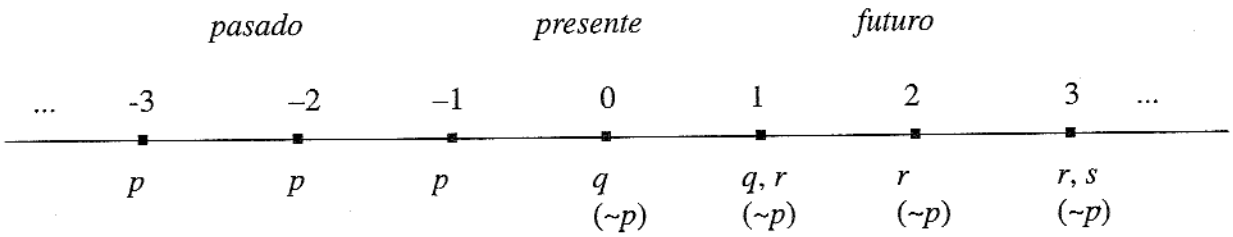
B. Resuelva y diga si hay que usar el supuesto e indique el tipo de iteración:

B1. $Gp > Fp$
B2. $\sim Pp > P\sim p$
B3. $F[p > p]$
B4. $Gp > GGp$
B5. $Gp > FGp$
B6. $GFp > Fp$
B7. $PPp > Pp$

7.3 Sistemas lineales y ramificados

7.3.1 Sucesión

Usaremos una metáfora común para el tiempo: una línea en la cual los instantes aparecen como puntos o nodos. El nodo del presente (o de algún instante de referencia) recibe el número 0; los nodos del futuro se numeran 1, 2, 3, etc., y los del pasado: –1, –2, –3, etc. Se dice que una oración es V o F en un nodo.

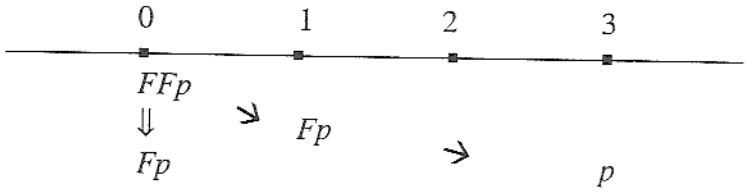


La proposición p es V en los tres instantes del pasado, pero es F ahora y en el futuro. En cambio, q es V ahora y en el nodo 1 del futuro (podríamos escribir "$\sim q$" en los nodos en que es F: –3, –2, –1, 2 y 3), r es V en todos los momentos del futuro y s, sólo en el tercero.

Ilustremos mediante tal representación el principio de la transitividad: $FFp > Fp$, permitido en S4; su demostración es la siguiente:

1	FFp	**h**
2	$c \mid \sim Fp$	**h**
3	$G \mid \sim Fp$	2 **i** (S4)
4	$G\sim Fp$	3 **ig**
5	$\sim FFp$	4 **fg**
6	FFp	1 **i**
7	Fp	2-6 **ing**

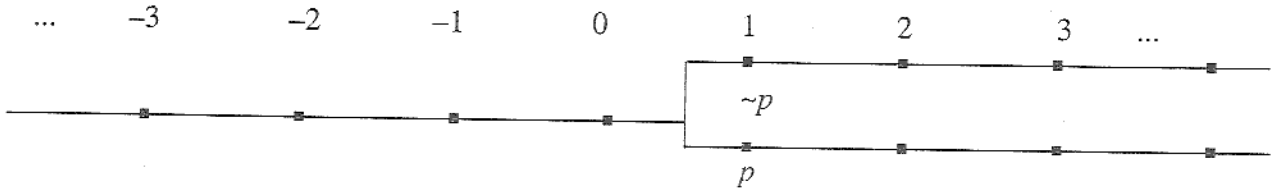
En el siguiente esquema, la flecha de doble astil ⇓ indica esta implicación y la sencilla el efecto de la fórmula a través del tiempo:



FFp implica que *Fp* es futuro, representable en algún nodo a la derecha (se escoge 1 arbitrariamente). La oración *p* en el tercer nodo (también escogido arbitrariamente) se sigue de *Fp* en 1, pues *Fp* implica que *p* le es futuro.

7.3.2 Bifurcación

Se han desarrollado dos clases de sistemas temporales: las lineales y las ramificadas o bifurcadas. Un sistema lineal no consta sino de una sola línea temporal; uno ramificado puede tener más de una, como muestra el siguiente esquema:



En el dibujo los nodos de las dos ramas tienen el mismo número (tal disposición no es necesaria). Las líneas —o "historias", como a veces se llaman— son paralelas pues, pero se consideran como separadas en el sentido de que la misma oración puede ser V en una y F en otra en el mismo nodo. En la rama de abajo *p* es V, pero es F en la de arriba. La ramificación también puede hacerse hacia la izquierda, e. d., hacia el pasado. Un sistema puede tener bifurcaciones sólo hacia la izquierda, sólo hacia la derecha o hacia ambas direcciones. No es necesario que los nodos se ordenen en las distintas líneas (14.5.1).

El sistema que hemos presentado permite la ramificación tanto hacia la izquierda como hacia la derecha, e. d., hacia el pasado y hacia el futuro. Para suprimir la bifurcación, si así se desea, pueden usarse dos axiomas especiales.[70] El primer axioma impide la ramificación hacia la derecha (hacia el futuro) y el segundo hacia la izquierda (hacia el pasado). El efecto de aplicar los dos axiomas es asegurar la linealidad total, estorbando toda ramificación. Más adelante veremos algunas interpretaciones filosóficas de estas variaciones (8.4.1, 14.5.1).

---

[70] Así, *CL* de N. B. Cochiarella; ver McArthur, 25, 28, 29. Una forma de los axiomas que impiden la bifurcación hacia el futuro y hacia el pasado:

$$[Gp \,\&\, p \,\&\, Hp] > HGp$$
$$[Gp \,\&\, p \,\&\, Hp] > GHp$$

O sea, que si *p* siempre es V, siempre era el caso que siempre sería V y siempre será el caso que siempre ha sido V. Se da otro par de axiomas para impedir la bifurcación; el que impide la ramificación a la derecha es:

$$[Fp \,\&\, Fq] > [F[p \,\&\, q] \vee F[p \,\&\, Fq] \vee F[Fp \,\&\, q]]$$

(el segundo tiene *P* en vez de *F*). Si *Fp* & *Fq* es V ahora, entonces hay tres posibilidades: *p* y *q* son simultáneos, *p* precede *q* (*q* está en el futuro de *p*) o *q* precede *p* (*p* está en el futuro de *q*). La alternativa *F*[*Fp* & *Fq*], la cual pediría dos futuros V en el mismo nodo queda excluida.

III Parte

SEMÁNTICA DE LOS MUNDOS POSIBLES

Capítulo 8

LÓGICA Y MODOS

8.1 Introducción

8.1.1 Semántica de los mundos posibles

La expresión "mundos posibles" es una metáfora filosófica que incluye elementos de análisis lógico y ontológico. Su uso simplifica, tal vez lo más que se puede, el escudriñamiento de algunos de los aspectos más enigmáticos del ser y del conocer: lo necesario y lo contingente. Los lógicos escolásticos hablaban de los *modos*: posible e imposible, necesario e innecesario, contingente e incontingente. Estos modos son el tema de la lógica modal alética.

"Semántica" en general tiene que ver con la significación (*sēmainein* en griego quiere decir "significar"). Usamos la palabra aquí del sentido y de la referencia del lenguaje o del pensamiento. Si las relaciones sintácticas son las que median entre los elementos del lenguaje, natural o artificial, o del pensamiento, las semánticas pueden concebirse como las relaciones que median entre el lenguaje o el pensamiento por un lado y las situaciones por otro. Las situaciones de que se trata en el caso de la modalidad son los mundos posibles. La *semántica* de los mundos posibles, pues, es, a grandes rasgos, la relación entre el lenguaje o el pensamiento y la realidad, la posibilidad, la necesidad, la contingencia.

Parece que la concepción, si no la metáfora, de los mundos posibles fue discutida por primera vez en la escolástica medieval, sobre todo por Gilberto Porretano y Juan Duns Escoto. Descartes y Leibniz, quien usó la frase "mundos posibles", aproximadamente en este sentido, también tenían ideas afines. Reformulado en los años sesenta de nuestro siglo por J. Hintikka, S. Kripke y otros, el tema ha llegado a ser un lugar común en la filosofía actual (9.). Es en efecto "interdisciplinaria", usada no sólo en la lógica y ontología (o metafísica), sino en la epistemología, en la ética y en la filosofía del derecho, en la lingüística y en la filosofía del lenguaje, en las filosofías de la ciencia y de la religión, en la literatura y en otros campos. Es un *desideratum* de los lógicos modales que la semántica de los mundos posibles sea compatible con muchas aproximaciones filosóficas, pero en sí misma tiene importantes incidencias filosóficas.

Hay que recordar que la investigación de los mundos posibles no está acabada y hay muchos puntos controvertidos, y mencionaremos varios de ellos. Sin embargo, se ha desarrollado hasta tal punto que es

ya un instrumento poderoso de análisis filosófico. Los lógicos medievales decían: "el burro no cata lo modal" (*de modalibus non gustabit asinus*), y en efecto algunas discusiones son abstrusas. Pero la teoría en general no es difícil y es asequible hasta los principiantes en la filosofía.

8.1.2 Verdad y mundos

La intuición básica de la semántica de los mundos posibles es que verdad y falsedad se refieren a distintos contextos modales o "mundos". Veamos lo que significa esto. Si pienso que llueve o digo "llueve", tengo razón si llueve y me equivoco si no llueve. Por así decirlo, pienso y digo la verdad si la realidad (en el sentido estricto) o la situación real es como pienso y digo. Pero si pienso y digo que *podría* llover, ¿con qué situación o "realidad" comparo mis pensamientos o mis palabras? Aunque no llueva, parece correcto decir que puede o podría llover, porque es posible en efecto que estuviera lloviendo ahora o que llueva mañana aunque no lloverá mañana. Por otro lado, si pienso o digo que tiene que llover cuando está lloviendo, parece que me equivoco, porque no es necesario que llueva. Pero, ¿con qué situación o "realidad" comparo mi creencia u oración de que tiene que llover?

La comparación se hace con los mundos posibles. La técnica de los mundos posibles ofrece una manera eficiente de juzgar la verdad o falsedad de los enunciados modales:

- Una proposición *asertórica* (no regida por un operador modal) es V ssi el caso es así, si la situación es así (si "corresponde" a la situación) *en un mundo específico*, p. ej., en el mundo real o en el mundo que forma el trasfondo de *El Quijote*. Es F si no es así en el mundo de que se trata. Mejor dicho, una proposición asertórica p es V en un mundo específico ssi este mundo se encuentra entre los mundos en que p es V.

- Una proposición *problemática* ($\Diamond p$) es V ssi es así (corresponde a la situación) *en al menos un mundo posible*, quizá el real (pues lo real ya es posible); o sea, que p es posiblemente V. $\Diamond p$ es F ssi no hay ningún mundo posible en que sea V.

- Una proposición *apodíctica* ($\Box p$) es V ssi es así (corresponde a la situación) *en todo mundo posible*; p es necesariamente V. $\Box p$ es F ssi es F en al menos un mundo posible.

- Una proposición de la *contingencia* (∇p) es V ssi es así (corresponde a la situación) en al menos un mundo posible y no es así en al menos un mundo posible; e. d., ssi es "posiblemente V y posiblemente F".

Hay, pues, varias maneras de expresar la modalidad:

- que p sea posible: es posible que sea V que p, es posiblemente V que p.

- que p sea necesario: es necesario que sea V que p, es necesariamente V que p.

- que p sea contingente: p es posiblemente V y $\sim p$ es posiblemente V (p es posiblemente F).

"Es posiblemente F que p" es equivalente a "es posiblemente V que no p" ($\Diamond\sim p$) y así se leen las otras formas negativas. Note que:

- "p es contingentemente V" indica la contingencia sartreana: p es V pero posiblemente es F: $p \& \Diamond{\sim}p$.

- "p es contingentemente F" indica la mera posibilidad: p es F pero posiblemente es V: ${\sim}p \& \Diamond p$ (4.1.5.3).

La verdad, pues, es relativa a los mundos posibles. En este sentido, es *verdadero* que el Quijote es oriundo de La Mancha y es *falso* que sea oriundo de Andalucía; relativo al mundo posible presupuesto en la novela de Cervantes. Y desde la misma perspectiva (del mundo quijotil) es *posible* que el Quijote sea oriundo de Andalucía; e. d., el Quijote es andaluz en otro mundo posible, distinto del mundo posible de *El Quijote* (y también distinto del mundo real). Además, ¿en el mundo real, donde no existe, es F que sea manchego y que sea andaluz?

Hemos explicado la sintáctica modal, el uso de los operadores $\Box$, $\Diamond$ y ∇ y el manejo de sus reglas (4). Ahora presentamos, de la manera más sencilla posible, las nociones básicas de la semántica modal y luego señalaremos algunas aplicaciones discutidas actualmente en la filosofía.

8.2 Semántica

8.2.1 Correspondencia y verdad

Es conveniente comenzar la exposición de la semántica de los mundos posibles con un repaso de las teorías de la verdad. Según la teoría de la *correspondencia*, la verdad o falsedad de la proposición se relaciona con la situación, los hechos, la realidad. Aristóteles la formuló así:

> decir de lo que es que no es o de lo que no es que es es la falsedad, pero decir de lo que es que es y de lo que no es que no es es la verdad (*to legein to on mē einai ē to mē on einai pseudos; to de to on einai kai to mē on mē einai alēthes*).[71]

Aquino dijo que la verdad es "la igualación del entendimiento y de la realidad (*adequatio intellectus et rei*)" y Kant, desde una perspectiva epistemológica diferente, que es "el acuerdo del pensar con su objeto" (*Übereinstimmung des Denkens mit seinem Gegenstand*).

Alrededor de 1920, Wittgenstein y Russell propusieron un isomorfismo estructural o paralelismo formal entre los hechos sencillos y las oraciones atómicas en el contexto de un lenguaje simbólico ideal.

Aquél habló de una relación de modelo (*abbildende Beziehung*) entre oración, pensamiento y situación (*Sachverhalt*); para averiguar si el pensamiento es V, hay que cotejarlo con el mundo. Para Russell la estructura del hecho corresponde a la de la oración (2.1.4):

hecho	*correspondencia*	*oración*
constituyente		nombre de cosa
componente		nombre de propiedad

[71] *Metafísica*, 1011B26 y ss.

Por ejemplo, en *Hn* (Napoleón es un hombre) y *Anj* (Napoleón ama a Josefina), *n* y *j* son términos singulares que denotan a Napoleón y Josefina, constituyentes de los hechos, y *H* y *A* son predicados (sencillos y relacionales) que corresponden a los componentes de los hechos. Russell prefería los nombres "lógicamente propios", como "esto" en "esto es azul" (2.1.6). La verdad de una oración *p* corresponde, pues, al hecho de que *p*.

J. L. Austin agregó la noción de convenciones a la correspondencia entre el mundo y las oraciones. En "Napoleón es hombre", una convención descriptiva que corresponde al término "hombre" correlaciona la oración con una situación general, y una convención demostrativa que corresponde a "Napoleón" la correlaciona con una situación particular:

convenciones	*correlación con oración*	*situación*
descriptiva		universal
demostrativa		específica

A. Tarski propuso la muy conocida teoría *semántica* de la verdad para explicar la "concepción aristotélica clásica de la verdad", viéndola como neutral epistemológicamente, y Kripke elaboró una versión parecida.[72] K. Popper consideró el análisis de Tarski como una versión más precisa de las teorías tradicionales de la correspondencia. Según la teoría, la oración:

"la nieve es blanca" es V ssi la nieve es blanca

es un ejemplo del esquema:

"O" es V ssi *O*

donde *"O"* es una oración (la *"O"* –entrecomillada– se toma como un nombre de la oración). Bastaría el esquema para definir la verdad si el número de oraciones fuera denumerable, pues sólo tendríamos que hacer una lista de las oraciones. Pero porque el número de oraciones posibles es infinito hay que tomar otro rumbo.

Tarski, presuponiendo la interpretación objetual de la cuantificación (2.2.8.2), usa la relación de la *satisfacción* para definir la verdad. P. ej., los objetos Eloísa, Abelardo, Cyrano y Roxanne "satisfacen" la oración abierta *Hx* ("*x* es un hombre"; 2.2.2), y los pares ordenados: Abelardo-Eloísa, Eloísa-Abelardo y Cyrano-Roxanne (pero no Roxanne-Cyrano) satisfacen la oración abierta *Axy* (*x* ama a *y*). En general, *x* satisface *Gx* ssi *x* es *G*, y *x* satisface *Rxy* ssi *x* guarda la relación *R* con *y*. La teoría de Tarski es aplicable principalmente a los lenguajes formales, pero D. Davidson se empeñó en acomodarla al lenguaje ordinario.[73] La doctrina también se ha empleado en el contexto de los mundos posibles.

Una manera de expresar la concepción de la verdad dentro de este marco sería:

- *p* es V ssi la situación es así
- *p* es F ssi la situación no es así

[72] Tarski, "The concept of truth in formalised language", 1931; "The semantic conception of truth", 1944; Kripke, "Outline of a theory of truth", 1975.
[73] "Truth and meaning", *Synthese*, 17, etcétera.

8.2.2 Otras teorías

Se han propuesto otras teorías de la verdad, las cuales no se oponen necesariamente a la de la correspondencia. Mencionamos las más destacadas. Algunos sostienen, a propósito, que es redundante hablar de la verdad, porque "*p* es V" es lo mismo que "*p*".

Usualmente se atribuye la teoría de la *coherencia* a Hegel: "la verdad es el todo (*das Wahre ist das Ganze*)". Idealistas como el inglés F. H. Bradley, positivistas lógicos como O. Neurath y otros filósofos más recientes como N. Rescher han tomado el mismo rumbo. Según una versión, la proposición es V ssi es comprensible y cabe sin problemas en el conjunto o contexto de las teorías ya aceptadas. Se notará que esta semántica es de índole sintáctica.

La teoría *pragmática* de la verdad se debe a Peirce, pionero con Frege de la lógica en el siglo XIX tardío. Podemos divisar el influjo de Hegel en su idea de que una proposición es V ssi es "útil a la larga" (*useful in the long run*); e. d., el método científico, cree Peirce, por ser constreñido por la realidad, conducirá en el porvenir al consenso. Sus compatriotas americanos J. Dewey y W. James siguieron su orientación. Parecida en este respecto es la "teoría del *discurso*", según la cual una proposición es V ssi se le asienta en una comunidad (la cual se aproxima a la) ideal. Y en la teoría *dialógica*, *p* es V ssi es "fundable" (*begründbar*) en el diálogo de ataque/defensa".[74]

Hay buenas razones para considerar que la teoría de la correspondencia es fundamental y que las demás son tributarias de ella. Un *objetivismo*, según el cual se da lo real independientemente de la mente puede verse históricamente como una síntesis del realismo tradicional "ingenuo" y el idealismo y fenomenalismo de los dos siglos pasados. En efecto, se habla hoy de la necesidad de volver a una "ingenuidad intencionada" llamada por W. James el "realismo natural".

8.2.3 Portador de la verdad

Consideremos ahora lo que es V o F, posible y necesariamente V o F en el sentido básico. Nuestro estudio de la lógica prescinde de las expresiones que no son V o F: preguntas ("¿llueve?"), mandatos ("¡lárgate!"), pronunciamientos ("os declaro marido y mujer"), exclamaciones, etc. (1.0). También hemos distinguido entre la oración (como muestra, signos materiales), el juicio (proceso o estado mental) y la proposición, expresada por la oración expresa y representada por el juicio (1.1.2.2).

Muchos toman la proposición por el portador fundamental de la verdad y modalidad. La proposición se ha considerado como un *ente abstracto* o contenido objetivo. Entre los entes abstractos se incluyen los números —a diferencia de los numerales (2.1.6)— y las propiedades universales, como son las "ideas" (*eidē*, *ideai*, *ousiai*) de Platón. Los estoicos hablaban de la proposición (*axiōma*) como una especie de ente abstracto (*lekton*), como también los escolásticos (*complexe significabile*, etc.), B. Bolzano (*Satzansich*) y Frege (*Gedanke*).

A veces se pide que la proposición sea "completa", en el sentido de que deben explicitarse todos los elementos esenciales. P. ej., la oración "te quiero" pronunciada por dos personas distintas expresa dos proposiciones también distintas (1.1.2.2).

[74] El desarrollo de la lógica dialógica es de P. Lorenzen y K. Lorenz desde alrededor de 1960 (9.2.3).

Los escolásticos llamaban *dictum* a la oración o parte de una oración afectada por un operador modal y lo interpretaban de dos maneras diferentes. Según su teoría lingüística, el modo afecta a la oración (el *dictum* como símbolo material) y, según la intensional, afecta el sentido (*significatum*) del *dictum* (9.2.2).

Una razón por la cual se niega que las oraciones y juicios sean V y F, posible y necesario en el sentido básico, es la disparidad entre la verdad y la modalidad por un lado y lo lingüístico y psicológico por otro. Antonio Rubio (14.1.4) dice que la ciencia no trata prioritariamente de los signos, sean éstos convencionales —el lenguaje—, sean naturales —los conceptos o procesos mentales:

> Pues cuando decimos "el hombre es un animal racional", lo que queremos decir no es que el vocablo "hombre" sea los dos vocablos "animal racional" (lo que es F), sino sólo que es la cosa significada por las palabras "animal racional". Vale lo mismo de las oraciones mentales... Las palabras significan convencionalmente lo que significan los conceptos naturalmente, y como el vocablo "hombre" difiere de los vocablos "animal racional", así el concepto y el proceso mental aludidos (*explicata*) por la palabra "hombre" difieren de los conceptos mentales aludidos por los vocablos "animal racional". Por lo tanto, como la noción de la palabra debe considerarse sólo por su significado, así también [deben considerarse] los procesos y conceptos. Pues como la oración "el vocablo 'hombre' son los vocablos 'animal racional' " es F, también es F la oración "[el concepto y proceso aludidos por el vocablo 'hombre' es] el concepto y el proceso aludidos por los vocablos 'animal racional'". Por consiguiente, como aquella oración debe tomarse no por las palabras sino por sus significados, así la segunda debe tomarse no por los conceptos sino por los significados de los conceptos.[75]

Rubio rechaza aquí el *nominalismo* y el *psicologismo* (ver la introducción). Según el primero la lógica estudia principalmente los entes lingüísticos (oraciones) y según el segundo, principalmente los entes del pensamiento (juicios).[76] Apunta al significado como el objeto de la investigación científica. La proposición se parece a otros entes abstractos: el sentido de una oración y la oración-tipo.

Según esta concepción, pues, las proposiciones son V/F, posiblemente V/F, etc. en el sentido fundamental, y las oraciones y los juicios lo son en un sentido secundario. La "correspondencia" de que se trata en tal teoría de la verdad es la relación que guarda la proposición (o, si se prefiere, el juicio o la oración) con la *situación* (*state of affairs* o *Sachverhalt*).[77] Si Cpx indica que p corresponde a x, el dominio de p son las proposiciones y el dominio de x son las situaciones. La proposición es V ssi corresponde a la situación en el mundo real, y posible ssi corresponde a la situación en un mundo posible. En las fórmulas $\Box p$, $\Diamond p$ y ∇p, pues, p expresa una proposición referida a situaciones en los mundos posibles.

8.3 Los modos

8.3.1 "Modal" y "real"

La lógica modal alética trata de los argumentos en que los modos desempeñan un papel inferencial. Aristóteles incluyó la verdad y la falsedad entre los modos, y hay en efecto una conexión estrecha entre la modalidad y el valor veritativo (8.1.2, 14.5.2):

---

[75] *Lógica mexicana*. edición de Alcalá, 1610, pp. 25B-26A.

[76] A veces se usan los términos así: el "nominalista" rechaza los entes abstractos y el "realista" o "platonista" los acepta; el "psicologista" o "conceptualista" prefiere hablar de lo mental, el "intensionalista" trabaja con los significados y el "extensionalista" evita mención de ellos.

[77] A veces *Sachverhalt* en alemán se toma como neutral, y en este caso nos referimos a las situaciones "reales" (*Tatsachen*, hechos).

- que p es posible: es posible que sea V que p, es posiblemente V que p
- que p es necesario: es necesario que sea V que p, es necesariamente V que p
- que p es contingente: p es posiblemente V y $\sim p$ es posiblemente V (p es posiblemente F).

"Es posiblemente F que p" es equivalente a "es posiblemente V que no p" ($\Diamond\sim p$) y así se leen las otras formas negativas.

En cuanto a otros sentidos de la contingencia, "p es contingentemente V" es la contingencia sartreana: p es V pero posiblemente es F (p & $\Diamond\sim p$), y "p es contingentemente F" es la mera posibilidad: p es F pero posiblemente es V ($\sim p$ & $\Diamond p$).

El vocablo latino *actuale* (y sus derivados en algunas lenguas europeas) se ha usado tradicionalmente para diferenciar lo que es real o fáctico de lo que es meramente posible. Pero la palabra "actual" en español (y otros idiomas) tiene la connotación temporal de "ahora". En vez de "actual", pues, emplearemos "real" para hacer el contraste con lo meramente posible. Las palabras "realidad" y "verdad" y "ser", íntimamente vinculadas, son ambiguas porque pueden incluir o excluir los modos, pues lo que es posible pero no "real" también es "real" y "verdadero" en otro sentido. Se trata, pues, de dos significados, uno amplio y otro estricto:

real, V (sentido amplio)	*real*, "actual" (sentido estricto), V en un contexto específico como el real
	modal: necesaria, posiblemente V.

Si no se indica lo contrario, "real" tendrá el sentido estricto, significando lo que es el caso en contraste con lo que es meramente posible. Se entiende que cualquier proposición que no tiene ningún operador modal alético es V en un contexto específico: p. ej., en el mundo real, donde es V "sin más", o en el mundo de *El Quijote*.

8.3.2 Lo que los modos modifican

Hay varios puntos de vista no sólo sobre lo que es V y F en el sentido básico (8.2.3), sino también lo que es posible, necesario y contingente. ¿Qué es "modificado"? Se ha considerado que los modos convienen a varios tipos de entes (1.1.2.2):

- las *proposiciones*; p. ej., la proposición de *tener la tierra una sola luna* es contingente.
- las *situaciones*, con las cosas, los eventos, las propiedades y relaciones, etc.; p. ej., la situación de que dos más dos son cuatro es necesaria.
- las *oraciones* del lenguaje ordinario o *fórmulas* lógicas bien formadas (signos materiales que expresan proposiciones); la oración "don Quijote está enamorado de Dulcinea" o la fórmula *Eqd* es posible (o problemática).

- los *juicios* mentales (pertenecen al pensamiento de un individuo); el juicio de que dos más dos son cuatro es posible.

Por supuesto que las oraciones y los juicios son "posibles" y "reales" en su propio ser de tinta, neuronas activadas, etc. Pero cuando decimos que una oración o un juicio es "posible", evidentemente nos referimos no a su ser propio sino a lo que expresa o representa.

8.4 Posibilidad, necesidad, contingencia

8.4.1 Aproximación informal

Preguntemos informalmente qué significan "necesario" y "posible". Digamos que un perro está durmiendo al lado de una piedra y hacemos estas preguntas:

pregunta	*respuesta*
¿Se rasca el perro?	no
¿Puede (podría) el perro rascarse?	sí
¿Se rasca la piedra?	no
¿Puede (podría) la piedra rascarse?	no

Ni el perro ni la piedra se rascan (realidad); sin embargo, el perro podría rascarse (posibilidad), pero la piedra no podría hacerlo (imposibilidad). Los pares de respuestas no/sí y no/no insinúan la diferencia entre la realidad y la posibilidad.

Preguntemos ahora sobre el número de los apóstoles y el número que es igual a seis más seis (6 + 6):

pregunta	*respuesta*
¿Los apósteles son doce?	sí
¿Los apósteles tienen que ser doce?	no
¿6 + 6 son doce?	sí
¿6 + 6 tienen que ser doce?	sí

El número de los apóstoles es 12 y 6 + 6 = 12 (realidad), en cambio 6 + 6 tienen que ser 12 (necesidad), pero el número de los apóstoles no tiene que ser 12 (innecesidad). Las pares sí/no y sí/sí muestran la diferencia entre la realidad y la necesidad.

Las combinaciones de no y sí también dan el sentido de la contingencia. Al preguntar sobre el perro:

pregunta	*respuesta*
¿Puede (podría) el perro rascarse?	sí
¿Puede (podría) el perro no rascarse?	sí

vemos que contestamos que sí en los dos casos. La contingencia lógica básica, pues, es lo que "puede que sí y puede que no": $\Diamond p$ & $\Diamond{\sim}p$. Pero el sentido "sartreano" de la contingencia es lo que es el caso pero puede o podría no ser el caso: p & $\Diamond{\sim}p$ (4.1.5.3), y la mera posibilidad es lo que no es el caso pero puede o podría ser: ${\sim}p$ & $\Diamond p$. La mera posibilidad, como la contingencia sartreana, implica la posibilidad básica (4.4).

Después de explicar esto, es importante agregar que los modos tienen un sentido *sincrónico* en la semántica de los mundos posibles (4.1.5.1, 9.1, 9.2.1). Cuando decimos que el perro puede rascarse o que es posible que se rasque, no queremos decir solamente que puede rascarse más tarde o que tiene el poder de rascarse. Al llamar a una situación posible, no hablamos sólo de una potencia o del tiempo (futuro o pasado), sino que la tomamos como "paralela" al mundo real, como una *alternativa* que ocurre "al mismo tiempo" o en otro tiempo. Si digo "el perro puede rascarse" cuando no se está rascando actualmente, la noción sincrónica es que *podría* rascarse ahora, o podría rascarse mañana (si se habrá rascado mañana o no) o tal vez en otro momento.

Se habla a veces de "historias" paralelas en este contexto, pero el sentido es distinto de las "historias" en la lógica temporal. Las temporales ordinariamente no se conciben como conjuntos maximales y varias líneas temporales pueden pensarse como integrantes del mundo real (7.3.2, 14.5.2).

Se ha tratado de analizar los modos en conceptos más fundamentales, definiendo la posibilidad, p. ej., como "concebible" o "autoconsistente" y describiendo la necesidad como "inabandonable", "no rechazable racionalmente", "autoevidente", "*a priori*", "archisabido", etc. Sin embargo, lo posible es anterior a lo concebible, pues la mente no determina sino (idealmente) reconoce lo que es posible. Parece mejor evitar el psicologismo y distanciar la posibilidad de lo que la mente supuestamente es capaz e incapaz de pensar (introducción y 1.1.2.2). Es la lógica epistémica la que trabaja con los conceptos del saber y creer (14.3.2).

Los filósofos dicen comúnmente que una proposición es posible ssi es *consistente* (no constituye ni implica una contradicción lógica) y *significativa* (tiene sentido). No hay que tomar esta regla empírica como definición de la posibilidad, pues es preferible definir la consistencia y la contradicción con base en la posibilidad (11.1).

Hemos visto que la necesidad y la posibilidad son interdefinibles y podemos substituir la una por la otra: $\Box p <> {\sim}\Diamond{\sim}p$ y $\Diamond p <> -\Box{\sim}p$ (4.1.7). Podríamos expresar la modalidad con un solo operador, $\Box$ o $\Diamond$, pero con rodeos de palabras o de símbolos. Si redujéramos todos los modos a la posibilidad, para decir "p no es necesario" (${\sim}\Box p$), tendríamos que decir "no es que no sea posible que no p" (${\sim}{\sim}\Diamond{\sim}p$). Pero desarrollaremos el sistema combinando la posibilidad y la necesidad y usaremos los tres símbolos $\Diamond$, $\Box$ y ∇, pues forman parte del discurso ordinario y filosófico.

Algunos filósofos han tomado la modalidad como un integrante del ser y/o de nuestro conocimiento (14.6.3). Sin embargo, sea que haya muchas versiones sintácticas (T, S4, S5, ...) y semánticas de la modalidad, puede tomarse como una tarea filosófica importante describir cómo las interpretaciones de los sistemas se relacionan con el ser y con el conocimiento, y quizás cerciorarse de si hay un sistema y una interpretación fundamental (8.4.1).

8.4.2 Clases de proposiciones modales

Hoy suelen distinguirse varios sentidos de los modos aléticos:

- La posibilidad *lógica* descansa sobre la coherencia lógica de la proposición (*llover y no llover* es lógicamente imposible).

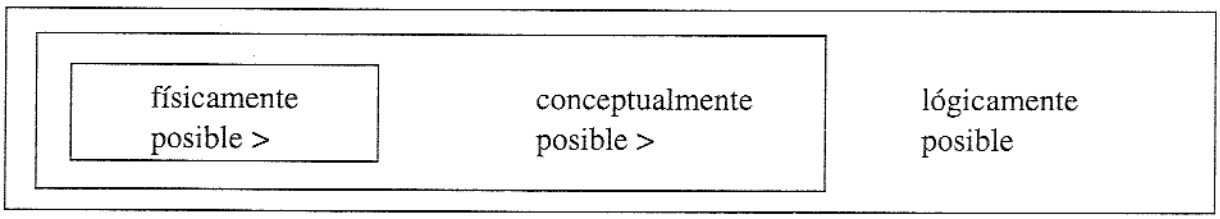
- La posibilidad *conceptual* sobre la coherencia conceptual de los integrantes de una proposición (*ser un soltero casado* es conceptualmente imposible).

- La posibilidad *física* (a veces se llama, con distintos matices: *natural*, *nómica*, *teórica* o *causal*), sobre la conformidad de la proposición con las leyes de la naturaleza (*carecer la tierra de la gravitación* es físicamente imposible).

- La posibilidad *práctica*; sobre la referencia a algún agente (*levantar Sócrates 200 kilos* (le) es prácticamente imposible).

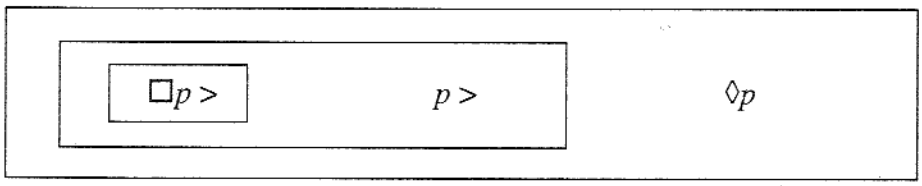
En la historia de la filosofía, la distinción entre la necesidad lógica y nómica es importante (9.2.1,3). Se notará que los dos últimos tipos de la posibilidad se acercan a varias nociones de la potencialidad.

Estos sentidos de "posible" se relacionan uno con otro de la siguiente manera. Si algo es prácticamente posible, es físicamente posible; si es físicamente posible, es conceptualmente posible; si es conceptualmente posible es lógicamente posible. Las implicaciones no valen al revés; p. ej., hay cosas físicamente imposibles que son posibles lógicamente. Tenemos, pues, estas implicaciones:



Tomaremos los modos en el sentido *lógico* excepto en ciertos contextos (14.1.1). Sin embargo, el sentido lógico de los modos dependerá tanto de los sistemas sintácticos en que se incorporan (12. y 13.) como de las distintas concepciones de los mundos posibles (10.3.2).

Hemos visto que lo real acarrea lo posible; todo lo real ya es posible ($p > \Diamond p$), pero no todo lo posible es real. También, lo necesario acarrea lo real ($\Box p > p$) y por ende posible ($\Box p > \Diamond p$), pero no todo lo real es necesario. Recuerde que "real" significa que la proposición es V en un mundo específico, p. ej., en el mundo real. Estas inferencias representan el vínculo con la verdad o con lo real (5.3), y pueden ilustrarse así:



8.4.3 Ejemplos

Se han propuesto varios tipos de proposiciones modales; p. ej., las siguientes se han considerado como necesarias:

1. Las *verdades matemáticas*:

- $2 + 2 = 4$ (en el sistema de base decimal).

- *Los ángulos de un triángulo suman 180°* (en la geometría euclideana).

- *Los ángulos de un triángulo suman más de 180°* (en la geometría riemanniana).

- *Los ángulos suman menos de 180°* (en la lobachevskiana).

En este siglo se ha discutido mucho si las matemáticas se fundan en la lógica (ver la introducción).

2. Las *verdades lógicas*; es necesaria toda proposición que aparece en el secuente principal de una prueba categórica (4.1.2, 12.2.1); ejemplos:

   - *Napoleón ganó en Waterloo o no ganó en Waterloo*; cualquier proposición de la forma $p \vee \sim p$ es necesaria.

   - *Si todo es idéntico consigo mismo, Napoleón es idéntico consigo mismo*; cualquier proposición de la forma: $\mathrm{U}xFx > Fa$ es necesaria.

   - *Si toda víbora es reptil y todo reptil es asqueroso, entonces toda víbora es asquerosa*; cualquier proposición de la forma $[[F \subseteq G] \,\&\, [G \subseteq H]] > [F \subseteq H]$ es necesaria.

   - *Todo es idéntico consigo mismo*; $\Box \mathrm{U}x(x = x)$ es necesario.

3. Las *proposiciones modales* mismas (un caso particular de las verdades lógicas): las afectadas por operadores modales son necesarias; tal validez dependerá del sistema modal (12. y 13.); ejemplos:

   - *Es necesario que 2 + 2 = 4*; si 2 + 2 = 4 es necesario, entonces es necesario que sea necesario; cualquier proposición de la forma $\Box p$ es necesaria: $\Box p > \Box\Box p$ (válido en los sistemas modales S4 y S5 pero no en T).

   - *Es posible que don Quijote se engañe*; si es posible que don Quijote se engañe, entonces es necesario que sea posible; cualquier proposición de la forma $\Diamond p$ es necesaria: $\Diamond p > \Box\Diamond p$ (válido sólo en S5).

   - *Es contingente que el monte Everest exista*; si es contingente que el monte Everest exista, entonces es necesario que sea contingente que exista; cualquier proposición de la forma ∇p es necesaria: $\nabla p > \Box\nabla p$ (válido sólo en S5).

Los siguientes casos pueden involucrar la necesidad conceptual al menos en el sentido de que depende del sentido de los términos.

1. Algunas proposiciones *teológicas*:

   - *Dios existe*: $\Box D$

   - *si Dios existe, entonces es necesario que exista*; $D \rightarrow \Box D$.

En cambio, la proposición de que *Dios crea* es contingente: ∇C; pero es necesario que sea contingente que Dios cree: $\Box\nabla C$.

2. Ciertas *implicaciones predicativas*; ejemplos:

   - *Toda cosa azul tiene color*; es necesario que un color específico sea de un color.

   - *La llegada de Colón a América ocurrió en el tiempo*; todo evento tiene que tener lugar en el tiempo.

   - *No soy ancestro de mi abuelo*; tal es el caso de ciertas relaciones, como las asimétricas.

3. Unas *implicaciones epistémicas*: *si Gödel sabe que 2 + 2 = 4, entonces lo cree*; es necesario que el saber (en el sentido estricto) entrañe el creer; cada proposición de la forma Sfp entraña Cfp necesariamente: $Sfp \rightarrow Cfp$ (5.5.2).

4. Algunas *implicaciones deónticas*:

   - *Si el presidente debe terminar la guerra, entonces puede terminar la guerra*; el deber presupone el poder; cualquier proposición de la forma Op entraña $\Diamond p$ necesariamente: $Op \rightarrow \Diamond p$ (14.4.2).

   - *Si Séneca es moralmente responsable, entonces es libre*; tomando "libre" en un sentido en que es incompatible con el determinismo.

5. Proposiciones *temporales* del *pasado*: *César cruzó el Rubicón* es necesario ahora, pero no entonces; se ha discutido en la filosofía actual y en la escolástica el sentido de la necesidad del pasado (7.1.1, 14.5.2).

Se dan ejemplos de la necesidad conceptual: "todo soltero es casado", "quien asesina comete un crimen", "todo coala es marsupial".[78]

Evidentemente, la negación de estas proposiciones necesarias son casos de la imposibilidad; p. ej., es imposible que Napoleón no sea idéntico consigo mismo o que dos más dos no sean cuatro.

[78] Snyder, p. 169.

Capítulo 9

HISTORIA

9.1 Aristóteles y los griegos

Se entretejen varios hilos en el trabajo de Aristóteles (y de los estoicos) sobre la modalidad. El hilo más familiar es su teoría de la potencialidad: la posibilidad es una potencia que se empeña en realizarse. Con su distinción entre acto (entelejeia o energeia) y potencia (dunamis), Aristóteles colocó la modalidad en el centro de la filosofía. Pero estos términos metafísicos no tienen precisamente el sentido que presuponemos en la lógica alética, y hay una controversia sobre su interpretación exacta. En efecto, la posibilidad para él es más amplia que la potencialidad.

Un segundo hilo es el modelo estadístico, o de frecuencia, según el cual la modalidad se vincula con el tiempo: la necesidad es la realización (el estar realizado) en todo momento, la imposibilidad la realización en ningún momento, y la posibilidad la realización en algún(os) momento(s). Se ha descrito con ayuda de las siguientes equivalencias, donde p indica las oraciones (o las situaciones) indeterminadas temporalmente, Tx: "x es un espacio de tiempo" y Vxp: p es V (o se realiza) en el momento x":

p es necesario: $Ux[Tx > V_x p]$

p es posible: $Et[Tx \,\&\, V_x p]$

La modalidad así concebida es parecida al sistema en que se asocia la necesidad con "siempre" y la posibilidad con "al menos alguna vez" (7.1.3, fin).

Según Hintikka valía para Aristóteles el "principio de la plenitud", afín al modelo estadístico de la modalidad e interpretable en estas proposiciones:

- toda posibilidad se realiza en algún momento
- lo que no es, es imposible
- lo que es siempre es necesario
- nada eterno es contingente[79]

[79] Hintikka, "Necesity, Universality and Time in Aristotle", *Ajatus* 20, 65-90, de A. O. Lovejoy, *The Great Chain of Being*, Harvard, 1936; ver Knuuttila, *Modalities...*, pp. 4-5.

Para establecer que algo es posible según esta concepción, hay que mostrar que sucede en un momento u otro, y para establecer que algo ocurre siempre, hay que mostrar que es necesario.

Otro modelo que se ha atribuido a Aristóteles es el de las modalidades diacrónicas, e. d., concebidas a través de la sucesión temporal real. Aristóteles no pensaba en las situaciones no reales como pudiendo realizarse "a la vez" que las reales. Para él no hay situaciones alternativas sincrónicas, y lo que es, es necesariamente mientras es, principio que ha sido formalizado como ($\Box_t p$: es posible en el tiempo t que p):

$$p_t > \Box_t p_t,$$

y las posibilidades alternativas desaparecen al realizarse una de ellas, sin que sigan vigentes las posibilidades de manera simultánea o paralela.[80] La concepción del presente como necesario se relaciona, pues, con la falta de una teoría sincrónica de la modalidad, para el planteo de la cual tenemos que esperar a los escolásticos (9.2.1).

Por otro lado, Aristóteles vio los modos de la necesidad y posibilidad como básicos e interdefinibles. Reconoció la diferencia entre la modalidad absoluta y la relativa: lo que es posible en sí mismo no es forzosamente posible en relación con ciertas otras situaciones, y lo que es necesario en relación con ciertas situaciones no es forzosamente necesario en sí mismo.

Aristóteles también formuló por primera vez la sintaxis de lo posible (*endejomenon* o *dunaton*), necesario (*anankaion*) y real (*hyparjon*). Sin embargo, su silogística modal, a diferencia de la asertórica, se ha considerado como defectiva, y se ha notado una ambigüedad en su noción de lo posible o contingente. Es interesante el hecho de que usó variables proposicionales en el contexto modal. Aristóteles presuponía estos principios (usamos la notación acostumbrada):

$$\Box p <> \sim\Diamond\sim p$$
$$\sim\Diamond p <> \Box\sim p$$
$$\Diamond p <> \sim\Box\sim p$$
$$\nabla p <> [\Diamond p \ \& \ \Diamond\sim p]$$
$$\nabla p <> \Diamond\sim p$$
$$\Box p > p$$
$$p > \Diamond p$$
$$\Box p > \Diamond p$$

y las reglas:

$$\begin{array}{|l} \Box\ [A > B] \\ \hline \Box\ A > \Box B \end{array}$$

[80] S. Knuuttila, *Modalities...*, pp. 120, 8, 9, 38, 57, referring to J. Hintikka, *Time and Necessity/ Studies in Aristotle's Theory of Modality*, Oxford, 1973, pp. 107-110.

$\Box\ [A > B]$

$\Diamond A > \Diamond B$[81]

Otros filósofos griegos, sobre todo los estoicos, también trataron de la lógica modal. Diodoro Crono incorporó el tiempo en su definición de la posibilidad y la necesidad y elaboró un sistema lógico que combina la temporalidad con la modalidad (7.1.2, 14.5.2). Sostuvo que una proposición puede cambiarse de modalidad (un evento era posible en el pasado, pero una vez que ha ocurrido es necesario), pero lo incontingente (lo necesario y lo imposible) no cambia de modalidad.

9.2 Escolástica

9.2.0 En general

Parece que la contribución de los filósofos medievales a la lógica modal fue nada menos que el paradigma sincrónico presupuesto en la semántica modal actual (9.2.1). También iniciaron el estudio de las lógicas epistémica y deóntica (9.2.4-6) como consecuencia de los avances en la teoría alética en el siglo XIV (así como en este siglo el interés por las lógicas intensionales subsiguió la formulación de la lógica modal).

A los escolásticos se deben varios desarrollos de la lógica modal, algunos de los cuales se han incorporado en el presente trabajo. Reconocían varios sentidos de "posible", y por ende de "necesario", pues también para ellos la necesidad y la posibilidad son interdefinibles. P. ej., alrededor del año 1300 se discutían al menos siete definiciones (no todas son claras para nosotros actualmente) de "posible":

- no-contradicción
- mutabilidad del valor veritativo
- verdad ocasional
- poder
- viabilidad
- posibilidad epistémica
- posibilidad radical

Durante este tiempo se desambiguó la noción aristotélica de "posible"; p. ej., la posibilidad y contingencia adquirieron sentido usual: $\Diamond p$ y ∇p ($<> \Diamond p \ \& \ \Diamond{\sim}p$). Hacían un uso modesto de los símbolos artificiales y notaban el paralelismo entre la modalidad y la cuantificación, equiparando la necesidad con "todo" y la posibilidad con "alguno" (4.1.3, 10.4). De ellos es el cuadro escolástico de la oposición de la modalidad que usamos (4.1.8) para distinguir entre los sistemas modales (4.5). En sus cuadros modales tanto *de dicto* como *de re* valen las relaciones de contradicción ($\Box p <\!/\!> \Diamond{\sim}p$ y $\Diamond p <\!/\!> \Box{\sim}p$), subalternación —implicación—($\Box p > \Diamond p$ y ${\sim}\Diamond p > {\sim}\Box p$), contrariedad ($\Box p \mid {\sim}\Diamond p$) y subcontrariedad ($\Diamond p \vee {\sim}\Box p$).

Mencionamos algunos aportes medievales importantes históricamente y relevantes para la lógica modal actual.

[81] Referencias en Knuuttila, *Modalities...*, p. 43.

9.2.1 La modalidad sincrónica

Los filósofos medievales estaban familiarizados con las varias concepciones griegas de la modalidad: potencialidad, frecuencia temporal y diacronicidad (9.1). Los griegos no disponían del paradigma sincrónico que se presupone generalmente en la filosofía actual. Un resultado de las investigaciones recientes de la modalidad en la filosofía medieval se ha expresado así: el modelo "de la multiplicidad referencial respecto a las alternativas sincrónicas fue introducido en el pensamiento occidental en las discusiones del siglo XII temprano" por filósofos como Gilberto Porretano.[82]

En el trasfondo de estas discusiones estaba la teoría, también novedosa, de la necesidad y posibilidad que san Agustín había elaborado para interpretar la noción católica de un Dios creador que elige entre historias providenciales alternativas. Agustín y también san Pedro Damiano (s. XI) creyeron que el concepto católico de Dios era incompatible con las doctrinas modales "filosóficas" —e. d., las diacrónicas griegas— porque limitaban la libertad divina. San Anselmo también había intentado crear una semántica modal útil en la teología filosófica.

El creciente influjo de Aristóteles en el siglo XIII estorbó algo el desenvolvimiento de la idea de la modalidad sincrónica, pero el hilo se retomó en la primera mitad del siglo XIV, cuando Juan Duns Escoto, Guillermo de Ockham y otros filósofos explicitaron las incidencias del nuevo enfoque.[83] Escoto sistematizó la teoría modal como multiplicidad referencial, la cual influyó directa o indirectamente en las teorías de Francisco Suárez, Luis de Molina, hasta Descartes y Leibniz. Los lógicos del siglo XIV formularon una teoría detallada de las inferencias (*consequentiae*) modales de la cual consideraban la silogística modal de Arisóteles como "un fragmento no muy feliz".[84]

La noción sincrónica de la posibilidad se ha formulado así (donde p_t: es V en tiempo t que p y $\Diamond_t p$: es posible en el tiempo t que p):

$$p_t \ \& \ \Diamond_t \sim p_t$$

"p es V en t y es posible en t que p sea V en t". Se puede ver por qué, como dijo Escoto, la aceptación del principio sincrónico entraña el rechazo del principio aristotélico: "lo que es, es necesariamente cuando es" (9.1):

$$\begin{array}{|l} p_t \ \& \ \Diamond_t \sim p_t \\ \\ \vdash \ldots \\ \sim[p_t > \Box_t p_t] \end{array}$$

Sin la sincronicidad no puede explicarse la libertad ni de Dios ni del ser humano, pues Dios puede ser libre cuando actualiza una situación sólo si ésta pudiera ser distinta, y el agente humano no es capaz de actuar libremente si, antes de actuar, se desvanecen las posibilidades de actuar de otra manera.[85] Ilustraremos adelante la relación entre la modalidad sincrónica y la lógica temporal (14.5.2).

---

[82] Simo Knuuttila, p. vii; Gilberto de Porreta, de la Porré o de Poitiers (d1154).

[83] Knuuttila, *Modalities...*, p. 138; es interesante que en la filosofía del Siglo de Oro también fue un aristotelismo (sobre todo los *Tópicos*), a mediados del siglo XVI (no sólo la conocida crítica humanista de Vives y otros), lo que dificultó el desarrollo del contenido más escolástico de la lógica.

[84] Knuuttila, *Modalities...*, p.vii, 45, 138-139, 175; Kluwer, *Modern Modalities*, 1988, p. vii-ix.

[85] Knuuttila, *Modalities...*, p. 143 y ss.

La semántica de los mundos posibles actual también incorpora la multiplicidad referencial respecto de alternativas sincrónicas; se ha sugerido una semántica como la de Kripke para interpretar la lógica modal elaborada por Juan Buridano en el siglo XIV.[86]

Por otro lado, se ha recalcado que Escoto atribuía cierta independencia ontológica a los modos al "considerar el dominio no existente de las posibilidades lógicas y sus estructuras modales como las condiciones trascendentales de todo pensar y ser".[87] Para él, Dios no crea lo posible por su voluntad, sino que lo reconoce por su entendimiento, y cualquier entendimiento omnisciente lo reconocería de igual manera; incluso lo posible lo sería aun cuando Dios no existiera (14.6.3).

9.2.2 *De dicto* y *de re*

Los escolásticos usaban los siguientes términos para distinguir entre varios tipos de modalidad:

- *de dicto*
- *de re* (4.1.5.1)

- de la inferencia (*consecuentiae*)
- del consecuente de la inferencia (*consequentis*)

- en el sentido compuesto ([*in*] *sensu composito*)
- en el sentido diviso (*sensu diviso*)[88]

A veces estos pares tenían la misma función: la de indicar el alcance del operador.[89] P. ej., en "Sócrates puede caminar y estar sentado" (suponiéndose que no puede hacer ambas cosas a la vez: C </> S):

$$\Diamond[Cs \ \& \ S]$$
$$C \ \& \ \Diamond S$$

en la primera fórmula (F) el sentido es compuesto (*de dicto* y el modo afecta la inferencia) y en la segunda (V), el sentido es diviso (*de re* y el modo afecta sólo el consecuente).

En la Edad Media, el sentido diviso pertenecía a la discusión del sentido de la modalidad (9.2.1), pues podría enfocarse de varias maneras, p. ej. (Tx: "x es un espacio de tiempo", p_x: "p en x" y $\Diamond_x p$: "es posible en x que p):

$$\mathrm{E}x\mathrm{E}y[Tx \ \& \ Ty \ \& \ (x \neq y) \ C_x \ \& \ \Diamond_x S_y]$$
$$\mathrm{E}x[Tx \ \& \ C_x \ \& \ \Diamond_x S_x]$$

donde la primera ("Sócrates camina en un momento en que es posible que en otro momento esté de pie") es una forma de la modalidad diacrónica y la segunda ("Sócrates camina y al mismo tiempo es posible que en este mismo momento esté de pie") es una forma de la modalidad sincrónica (14.5.2).

---

[86] G. E. Hughes, "The Modal Logic of John Buridan", *Atti del Convegno Internazionale di Storia della Logica. Le Teorie delle Modalità*, 1989.

[87] Knuuttila, p.vii, 139 y ss.

[88] Esta distinción se remonta a Aristóteles (*suntheis* y *dielon*), *De Sophisticis Elenchis*, 166A. Abelardo usó *de re/de sensu, per divisionem/per compositionem* (*conjunctionem*).

[89] Por ejemplo, en santo Tomás, *Summa contra gentiles*, 1:67.

En realidad, los escolásticos usaron la distinción entre la modalidad *de dicto* y *de re* en varios contextos (9.2.4, 14.6.1.1, 7.1.2); y también se emplea frecuentemente en la lógica actual, si bien su aplicación es algo flexible. En una expresión *de dicto*, el operador (p. ej., modal o de la negación) rige la fórmula como conjunto:

$\Box \mathrm{U}xFx$
$\Diamond \mathrm{E}xFx$
$\Box \mathrm{U}x[Fx > Gx]$
$\Box[p > q]$
$\sim Fa$

En una expresión *de re*, el operador rige una parte:

$\mathrm{U}x\Box Fx$
$\mathrm{E}x\Diamond Fx$
$\mathrm{U}x[Fx > \Box Gx]$
$p > \Box q$
$\sim Fa$

(el guión en la última expresión: "no-*F*", el complemento de la propiedad *F*). También podemos usar la distinción con otros tipos de operadores; el operador deóntico "debe ser el caso que *p*" (14.4.5):

- *de dicto:* $O[p > q]$
- *de re:* $p > Oq$

Podemos decir, p. ej., de las fórmulas de Barcan, que la inferencia:

- $\mathrm{U}x\Box Fx > \Box \mathrm{U}xFx$ es de *de re* a *de dicto*
- $\Diamond \mathrm{E}xFx > \mathrm{E}x\Diamond Fx$ es de *de dicto* a *de re* (13.4) [90]

Algunos filósofos han entendido las expresiones *de dicto* y *de re* como indicativas de algo más que la mera colocación de los operadores. En tal interpretación la modalidad *de dicto* se toma por la modalidad lógica "regular," y se aplica a las proposiciones u oraciones (*dicto*). En cambio, la modalidad *de re* se refiere a la manera en que una propiedad conviene a una cosa (*res*). A veces se especifica que una expresión *de re* debe contener al menos una variable individual libre (una oración abierta, 2.2.2) como $\mathrm{U}x\Box \mathrm{F}x$, y una expresión *de dicto* no contiene ninguna variable individual libre, como $\Box \mathrm{U}xFx$.

En una expresión como $\mathrm{E}x\Box Fx$, se dice que la propiedad conviene *esencialmente* a la cosa si es necesario que le convenga: "*x* es *F* esencialmente". El "esencialismo", en efecto, la tesis de que las cosas poseen algunas propiedades esencialmente, ha sido el objeto de una discusión importante en la lógica modal actual (12.2.4, 13.4.2).

[90] Snyder, pp. 142-143 y Hughes y Cresswell, pp.183 y ss.

Otro ejemplo del uso contemporáneo es la crítica hecha por A. Plantinga de un argumento que presentó W. Quine como objeción contra la lógica modal en general. Es contradictorio, había dicho éste, asertar las siguientes tres proposiciones: algún matemático monta en bicicleta, todo matemático tiene que ser racional y ningún ciclista tiene que ser racional (pues un chimpancé puede montar en bicicleta).[91] Quine presupone una interpretación *de re* de las premisas 2 y 3 (C: ser ciclista, M: ser matemático, R: ser racional):

1		Ex[Cx & Mx]	**h**
2		Ux[Mx > □Rx]	**h**
3		Ux[Cx > ~□Rx]	**h**
4	x	Cx & Mx	**h**
5		Cx	4 **ec**
6		Mx	4 **ec**
7		Ux[Mx > □Rx]	2 **i**
8		Mx > □Rx	7 **ecu**
9		Ux[Cx > ~□Rx]	3 **i**
10		Cx > ~□Rx	9 **ecu**
11		□Rx	6, 8 **mp**
12		~□Rx	6, 10 **mp**
	...		

Los pasos 11 y 12 son contradictorios. Plantinga dice que la traducción es incorrecta, pues debería de ser *de dicto*:

1	Ex [Cx & Mx]
2	□Ux [Mx > Rx]
3	□Ux [Cx > ~Rx]
	...

y esta interpretación no es contradictoria.

[91] Ver Plantinga, *The Nature of Necessity*; Quine agrega que todo ciclista pero no todo matemático tiene que tener dos piernas; Quine alteró su crítica después del desarrollo de la semántica modal.

9.2.3 Concepto de mundos posibles

La idea de las posibilidades sincrónicas surgió en la discusión de la potencia y libertad de Dios. Según san Agustín, hay posibilidades no realizadas, las que Dios "pudo pero no quiso" (*potuit sed noluit*) llevar a cabo, pues tiene el poder de escoger libremente una historia, la real, entre los innumerables designios providenciales alternativos.

En el sigo XII Gilberto Porretano, partiendo de la idea agustiniana, concibió una nueva semántica modal basada en la intuición de situaciones reales y no reales simultáneas, e. d., un sistema de referencia múltiple respecto de los dominios alternativos sincrónicos. Criticó la idea grecorromana antigua de la necesidad nómica o física, según la cual las situaciones que prevalecen siempre en la naturaleza son por esta constancia necesarias. Las regularidades naturales son contingentes, dijo, porque en primer lugar no es menester que nada sea creado y, además las invariedades del mundo creado no se encuentran forzosamente en los otros programas providenciales alternativos que Dios no realizó pero pudo realizar. En el s. XIV se desarrollaron teorías parecidas en las que se distinguía entre la necesidad lógica y la nómica (14.1.1, 14.5.2).

Si Dios quisiera, dijo Gilberto, podría realizar un mundo no sólo con otras regularidades naturales sino con individuos distintos:

> pues algo cuando no era podía ser por el poder divino, y también el mismo cuando es puede no ser.[92]

Hay en efecto un sinnúmero de "situaciones posibles" (*possibilia*) no realizadas. Intuyó la identidad transmundial de los individuos (10.3.2): les convienen propiedades posibles en el sentido de que poseen propiedades distintas en historias alternativas. Sócrates, cuando está sentado, realmente podría estar parado "a la vez", pues pertenece a una historia alternativa en que está de pie. Gilberto definió el individuo modalmente; la "platonidad (*platonitas*)", p. ej., es todo lo que Platón no sólo era, es y será, sino también podría ser sin jamás serlo.

Se trata, pues, de una nueva concepción modal de la verdad. Ya que los términos modales tienen referencia a los entes y sus propiedades en las situaciones realizables en principio por la elección divina, tenemos esta definición:

> "es posible que *p*" es V si hay una historia concebible en que *p* es V.[93]

En el siglo XIII, santo Tomás de Aquino, con otros filósofos, distinguió entre el poder "dispuesto (*ordinata*)" de Dios, por el que realiza el plan providencial que escoge (el mundo real), y su poder absoluto, entendido como la capacidad de realizar (sólo) lo consistente, pues la posibilidad absoluta depende de la compatibilidad de las propiedades. Este concepto de la consistencia, a propósito, hallado también en Aristóteles, corresponde a la definición de los mundos posibles como conjuntos consistentes. Las posibilidades constituyen un *plenum* ontológico, identificado con la esencia de Dios, de la "imitabilidad para fuera (*ad extra*)" del ser divino. Santo Tomás razonó que porque hay posibilidades no realizadas, el universo es contingente y dependiente de su voluntad. En particular, opinó que es posible que el mundo

[92] Citado por Alanen y Knuuttila, "The Foundations of Modality and Conceivability in Descartes and his Predecessors", Modern Modalities, nota 79, p. 52.

[93] Knuuttila, *Modalities...*, 76-77, 70-71, 75, 82, 155ss, 79, 81.

creado no haya tenido un comienzo (puede haber cosas eternas contingentes). La modalidad para él, pues, está fundada ontológicamente.[94]

El siglo XIV vio la sistematización de la intuición de la modalidad sincrónica. Escoto era la figura clave; la idea de los mundos posibles, "ya se encuentra en Duns Escoto, si bien no usa el término".[95] Para él, el área del ser posible incluye todos los individuos concebibles junto con sus propiedades e interrelaciones. Pero algunas de las propiedades de una cosa son contradictorias y, por lo tanto, deben convenirle por separado y no a la vez. Por lo tanto, se agrupan en conjuntos las propiedades que son posibles, y los conjuntos resultantes descansan, pues, como nuestros mundos posibles, sobre la relación de la composibilidad. De estos conjuntos, Dios, por su voluntad, entresaca un conjunto para actualizar. Escoto definió explícitamente el sentido sincrónico de la contingencia:

> No llamo algo "contingente" porque no es el caso siempre o necesariamente, sino porque lo contrario podría ser real en el mismo momento en que ocurre.[96]

Además, para Escoto los individuos están en más de un mundo alternativo; esta concepción difiere de la de Leibniz, quien los confinó en uno solo.

También influyó en la semática modal medieval la práctica de los ejercicios lógicos llamados "obligaciones", una teoría dialogal de la lógica.[97] El iniciador del debate comienza estipulando una "propuesta" (*positum*), generalmente contingente y F. Su rival debe aceptarla junto con las proposiciones que sabe que son V realmente. Entonces el iniciador le propone otra proposición, y su compañero debe contestar si es V o F (o dudoso) dentro del marco de la situación convenida, y pierde si su respuesta es inconsistente con la situación. Es evidente que el conjunto de proposiciones (la propuesta más las otras) es parecido a un mundo meramente posible en que "están" los contrincantes. Ahora bien, Escoto hizo una alteración decisiva en una de las reglas del juego al permitir que se considerase la propuesta no en otro tiempo sino como alternativa sincrónica.[98]

El jesuita español Luis Molina (m. 1600) elaboró una teoría de los "órdenes-de-las-cosas (y-de-sus-circunstancias): *ordines rerum (et circumstantiarum earum)*", los cuales son muy parecidos a nuestros mundos posibles (10.3.1). Aquí también el contexto fue la teología filosófica: la controversia *de auxiliis* en torno al libre albedrío humano y el conocimiento y la actividad divinos. Veamos un ejemplo de la discusión:

> Dios, sin quitar a nadie la libertad de su albedrío, conoce... todos los futuros contingentes, no en el ser de lo futuro a secas sino bajo una condición: si por la determinación libre de su voluntad resuelve actualizar este u otro orden-de-las-cosas, y conoce no sólo las [situaciones] que de hecho son, fueron o serán, sino también una infinidad de otras que serían si actualizara otro orden o si en este orden actualizara otras circunstancias.

Dios conoce con certeza [lo que pasará]... no porque determine el libre albedrío, sino porque... resuelve libremente actualizar el libre albedrío en este u otro orden-de-las-cosas-y-de-sus-circunstancias.[99]

---

[94] *Summa theologiae* 1:25:3, 5.

[95] Alanen y Knuutila, "The foundations of Modality and Conceivability in Descartes and his Predecessors", *Modern Modalities*, nota 30, p. 47.

[96] *Ord.* 1, dist. 2, p. 1, cuestiones 1-2; *De primo principio*, 4:4; citado en Knuuttila, *Modalities...*, p. 143.

[97] Algunas de sus ideas básicas se remotan a Aristóteles (*Tópicos*, lb. 8). Los pimeros tratados de las obligaciones, en el marco de los recursos de la lógica, datan del siglo XIII, y con el tiempo adquirieron un empleo especial en la teología. Las obligaciones medievales inspiraron el desarrollo en este siglo de la *lógica dialógica* de K. Lorenz ("Dialogspiele als semantische Grundlage von Logikkalkülen", *Archiv Für mathematische Logik und Grundlagenforschung*, 11) y P. Lorenzen (ver *Formale Logik*, 1970, p. 160ss).

[98] Knuuttila, *Modalities...*, pp. 100, 140-144, 149.

[99] Textos referidos por A. Kenny, Universidad de Cornell, 1980. Molina también usó la expresión "*mundus possibilis*", pero en el sentido de un conjunto posible de cosas.

Parece que Molina también concibió los "órdenes" en términos de las alternativas veritativas de cada proposición, como los conjuntos consistentes maximales (9.3). Asimismo analizó el concepto de "decidir Dios actualizar un mundo (*statuere creare ordinem*)" y elaboró una conocida teoría de cómo el saber divino se relaciona con lo modal.[100]

Francisco Suárez, cofrade de Molina y autor de las influyentes *Disputationes Metaphysicae* (1597), distinguió entre dos sentidos de "es" en una oración como "el hombre es un animal": *1*) cuando implica la existencia de lo que tiene las propiedades *hombre* y *animal* y *2*) cuando se entiende como una oración condicional: "si es un hombre es un animal", sin el compromiso existencial. El primer tipo de oración no es necesario, pues el hombre-animal no existe necesariamente, pero el segundo es necesario porque es V de las posibilidades. Las necesidades son V "no sólo porque están en el entendimiento divino sino también lo son por sí mismas aparte de esto".[101]

9.2.4 La lógica epistémica

El sistema epistémico de J. Hintikka, expuesto en la sección 5, se considera como un ejemplo típico del análisis conceptual. Pero los lógicos medievales del siglo XIV trabajaban con la lógica epistémica como consecuencia de su desarrollo de la aproximación sincrónica de la lógica modal (9.2.1). Con los modos "necesario", "posible", ... asociaban los conceptos de "sabido" (*scitum*), "dudoso" (*dubitum*), "opinado" (*opinatum*), "creído" (*creditum*), "imaginable", "entendible", etc., y se preguntaban si de ellos valían las inferencias válidas en la lógica alética.

Por regla general, su análisis epistémico se limitaba a los pensadores del mundo real y no suponían la "omnisciencia lógica" de Hintikka. Por lo tanto, se rechazaban algunos principios aléticos en el contexto epistémico. Muchos negaban, p. ej., que una proposición epistémica *de re* deba inferirse de una *de dicto*; si Fulano sabe el antecedente no se sigue que sepa el consecuente:

NO 1 | $Sf[p > q]$

2 | $Sfp > Sfq$

Sin embargo, algunos filósofos medievales del siglo XII permitían la inferencia, y es posible que Ralph Strode haya formulado sus inferencias desde la perspectiva del pensador ideal de alrededor de 1370 (14.3.2).[102]

Otro ejemplo es su rechazo de la siguiente inferencia (*s*: Sócrates, *Ex*: "*x* es una estrella arriba"):

NO 1 | $SsExEx$

2 | $ExSsEx$

[100] Distinguió tres tipos de conocimiento divino: natural (de la esencia y de las posibilidades), libre (de situaciones contingentes que sucederán absolutamente) y medio (de situaciones contrafácticas).

[101] Alanen y Knuuttila, "The Foundations of Modality...", p. 11.

[102] *Consequentiae Strodi*, Venecia, 1484, aludido en Knuuttila, *Modalities...*, p. 177.

suponiéndose que Sócrates está en el sótano y no puede ver la estrella. La inferencia, a propósito, no se permite en los anillos modales. Según aquellos escolásticos, el segundo paso puede implicar falsamente que haya una estrella específica la cual Sócrates sabe que está arriba. Sin embargo, Gualterio Burley y Juan Buridano permitían la siguiente inferencia (*a*: Arturo), la cual ha sido formulada como:

1 | $SsExEx$

2 | $Ex[(x = a)\ \&\ SsFx]$

inferencia en la que el segundo paso dice que hay una estrella (Arturo) que Sócrates sabe que está arriba si bien no sabe cuál sea. También permitían una conclusión *de re* en el contexto de la identidad, si bien no aceptaban la aplicabilidad irrestricta de la sustitutividad de la identidad, **ei** (14.3.4).[103]

En la historia de la filosofía se habían desarrollado muchos temas afines a la lógica epistémica. Se atribuye a Platón ideas fundamentales que se han incorporado en el sistema de Hintikka:

$$Sfp > p$$

Fulano sólo puede saber que lo verdadero es V, y

$$Sfp > Cfp$$

tiene que creer lo que sabe. Esta última implicación, la cual se ve como la base de la lógica epistémica, también fue admitida en la Edad media, cuando el asentimiento a una proposición corresponde a nuestro concepto de la creencia.[104] Ockham prefiere la interpretación que repasamos (5.3), la cual incluye la condición de la justificación (*Jfp*: "Fulano es justificado para aceptar que *p*"):

$$Sfp > [Cfp\ \&\ p\ \&\ Jfp]$$

Tomás de Aquino elaboró un "cálculo epistémico" sobre la base del asentimiento y adherencia fuertes o débiles (5.3):

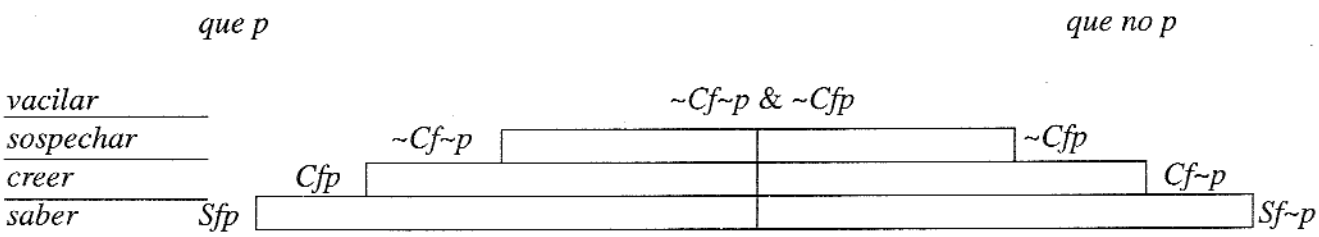
- saber, entender (*scire/intelligere*): asentimiento firme, adherencia al valor veritativo; descansa sobre el "ver" (*videre*)
- opinar (*opinari*): asentimiento débil, adherencia débil, con "pensamiento" (sin lograr una conclusión "firme") y temor del error
- sospechar (*suspicari*): inclinación a un valor veritativo "por escaso motivo"

[103] Knuuttila, *Modalities*..., pp.177, 180-181; formalización, 180.

[104] Explícitamente por Robert Holcot, Knuuttila, *Modalities*..., p. 178.

- vacilar: (*dubitare*): no hay ni asentimiento ni adherencia ni inclinación
- aceptar por la fe religiosa (*credere —fide—*): adherencia firme sin "ver" ni, por ende, "saber"

Tomándose el asentimiento como la creencia en el sentido usual, el siguiente esquema capta este planteamiento:



9.2.5 La lógica deóntica

Entre los conceptos que los lógicos medievales asociaban con los modos aléticos se encuentran no sólo "sabido", "creído", sino también "obligatorio" (*obligatum*), "lícito" (*licitum*) e "ilícito" (*illicitum*), los cuales corresponden a los operadores epistémicos *O*, *L* y *V*. Abelardo ofreció la siguiente descripción "deóntica" de los términos modales aléticos: lo que la naturaleza:

- "exige" corresponde a la necesidad
- "permite", a la posibilidad
- "prohíbe", a la imposibilidad

Para el siglo XIV ya se conocían las coimplicaciones (6.1.1) que relacionan los operadores fuerte y débil:

$$Op \leftrightarrow \sim L\sim p$$
$$\sim Op \leftrightarrow L\sim p$$
$$O\sim p \leftrightarrow \sim Lp$$
$$\sim O\sim p \leftrightarrow Lp$$

y también las que definen la prohibición:

$$Op \leftrightarrow V\sim p$$
$$Vp \leftrightarrow O\sim p$$

Se preguntaba si valen en la ética tales principios modales como:

1 $\Box[p > q]$

2 $Op > Oq$

y

$$\begin{array}{l|l} 1 & \Box[p > q] \\ \hline 2 & Lp > Lq \end{array}$$

Si el antecedente es obligatorio o permitido ¿es obligatorio o lícito el consecuente? También había discusiones de las paradojas deónticas en este contexto (14.4.5).[105] En la escolástica posterior se desarrollaba una interesante lógica de la conciencia que combinaba elementos epistémicos y deónticos, p. ej., en la controversia sobre el probabilismo (14.4.4).

9.2.6 Teoría de la acción

Una lógica de la voluntad fue elaborada en la Edad media, estrechamente ligada con la ética. Se preguntaban por la aplicación de los principios modales; p. ej.: si una persona desea el antecedente, ¿desea también el consecuente? ¿Querer el fin implica querer los medios? Aristóteles dio el ejemplo del mercader que arroja su mercancía al mar para aligerar el barco durante una tormenta. La supervivencia depende de la pérdida del cargamento, pero ¿el deseo de salvarse implica que también desea perder su mercancía? Estas cuestiones condujeron al desarrollo en la escolástica de las doctrinas del "*voluntarium*" (lo que se desea) y del "doble efecto" (la moralidad de un acto que tiene un efecto adverso no deseado).

Se empleaba un ejemplo humorístico de la persona que quiere ganar cien marcos (M) sin querer ensuciarse en el barro (B), sobreentendiéndose que si no se ensucia, no recibe el dinero. Algunos filósofos, a pesar de permitir la inferencia de **ec**:

$$\begin{array}{l|l} 1 & M \,\&\, B \\ \hline 2 & B \end{array}$$

rechazaron la siguiente implicación (usemos Qfp para "Fulano quiere/desea que p"):

$$\begin{array}{l|l} 1 & Qf[M \,\&\, B] \\ \hline 2 & QfB \end{array}$$

y también rechazaron el argumento:

$$\begin{array}{l|l} 1 & M > B \\ 2 & QfM \\ \hline 3 & QfB \end{array}$$

[105] Knuuttila, *Modalities...*, pp. 90, 176, 182 y 183-196.

o sea que desear el antecedente no implica desear el consecuente (no habría ninguna regla de la "introducción del querer"). En tales contextos, hacían varias distinciones y proponían varias soluciones.[106]

9.3 Leibniz y los modernos

Leibniz, el "Aristóteles moderno", se ha comparado con Jano, el dios romano de dos caras, una vuelta al porvenir y otra al pasado.[107] Se han detectado las semejanzas entre su lógica y la actual, y desde mediados del siglo XX comenzó a ejercer un influjo en su desarrollo de la lógica. Sin embargo, sólo se ha comenzado a reconocer la deuda que debía a la lógica escolástica.[108] Leibniz, en efecto,

> representa un atradición de la filosofía alemana distinta de la de Kant y de los filósofos del idealismo alemán, pues a diferencia de éstos también reconoce la tradición latinorrománica, tan importante para la cultura europea, y es el único gran pensador que, por su larga estancia en París y sus muchas publicaciones en francés, pertenecía desde el principio a la cultura de dos pueblos europeos.[109]

La modalidad fue una de las áreas de la lógica escolástica que Leibniz desarrolló de manera original. Usó la expresión "mundo posible" aproximadamente en el sentido actual, y dio la clásica definición semántica de los modos: los operadores modales aluden al dominio de vigencia de las proposiciones:

- necesario$=_{df}$ V en todos los mundos posibles
- posible$=_{df}$ V en al menos un mundo posible
- contingente$=_{df}$ V en este mundo posible pero no en todos

Concibió el mundo posible como "una pluralidad maximal, en lo que al contenido atañe, de situaciones, o un conjunto consistente maximal de individuos posibles que junto con sus propiedades son composibles".[110] Demos un ejemplo que recuerda una idea de B. Russell; digamos que hay tan sólo tres proposiciones: "hay perros" (*P*), que "hay unicornios" (*U*) y que "3 + 3 = 6" (*T*). Tenemos 8 posibilidades:

P	*U*	*T*	*real*
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

[106] Knuuttila, *Modalities...*, pp. 185 y ss.

[107] Hans Burkhardt, *Logik und Semiotik in der Philosophie von Leibniz*, Munich, 1980, p. 15.

[108] Leyó a F. Suárez a los trece años, dijo, como otros solían leer novelas; F. Copleston, *A History of Philosophy*, t. 4, p. 270.

[109] Burkhardt, p. 21.

[110] Burkhardt, p. 255.

Los mundos posibles, pues, son maximales o "exhaustivas" (13.4.4). Sin embargo, Leibniz opinó que una cosa singular no está en más de un mundo posible (10.3.2).[111]

Leibniz elaboró una lógica deóntica en el contexto de la jurisprudencia. Notó un paralelismo entre los cuantificadores, los operadores aléticos y los "*modalia juris*" (modos del derecho), los cuales disponemos en un cuadro de oposición:

justo (*aequum, deitum)*	ilícito (*injustu/illicitum*)
necesario	imposible
todo	ninguno

lícito (*justum/licitum*)	"omitible" (*omissibile/indebitum*)
posible	posible que no
alguno	alguno no

indiferente (lícito y "omitible")[112]

La famosa tesis leibniziana de que vivimos en el mejor de los mundos posibles plantea un problema para el teísmo, pues parece que Dios no era libre si no tenía otra opción sino la de actualizar el mundo mejor. Leibniz trató de resolverlo distinguiendo entre la necesidad metafísica y la moral: Dios escogió el mundo real por una necesidad no metafísica sino moral.[113]

Mencionamos brevemente algunas opiniones de otros filósofos modernos en torno a la modalidad. Descartes anticipó con Leibniz (y la escolástica) la idea de la necesidad como V en todos los mundos posibles.[114] Su aproximación a la modalidad se ha llamado constructivista, por opinar, en oposición a Suárez (9.2.3), que Dios determina libremente que las verdades necesarias sean válidas porque, en Él , el desear y el conocer son lo mismo. Hobbes y Spinoza no distinguían entre la necesidad lógica y la nómica y tendían al determinismo metafísico.

Kant también puede llamarse constructivista en el sentido de que los modos, por ser un aspecto *a priori* del proceso sintetizador del conocimiento experimental (son categorías), se deben a la mente humana. Según Hegel, las posibilidades lógicas son productos de la mente, tributarias del proceso ontológico. Las posibilidades reales son como momentos en el proceso cósmico.

En el siglo XIX, Charles Renouvier y otros filósofos franceses admitieron las posibilidades diacrónicas alternativas, mientras que Henri Bergson las rechazó. Los autores británicos del mismo tiempo tendían a reducir la modalidad a la probabilidad y en la primera mitad de este siglo el positivismo lógico intentó desarrollar una filosofía empírica desprovista de la modalidad. En el siglo pasado, uno de los autores más interesantes por la modalidad es el estadounidense Charles Sanders Peirce, quien se autodenominó un "realista escotista".

---

[111] Ver p. ej., Alanen y Knuuttila, "The Foundations of Modality...", pp. 34-35.

[112] Burkhardt, p. 421. El juicio de Burkhardt de que Leibniz es "el padre intelectual y precursor de la moderna semántica de los mundos posibles" (pp. 256, 259) y "el fundador de la lógica deóntica" (p. 420) debe ser matizado por los estudios recientes sobre la lógica medieval (y sobre Descartes).

[113] Hintikka, "Was Leibniz's Deity an *Akrates*?", *Modern Modalities*, pp. 85-108. En todo caso, la creación no sería necesaria ni metafísicamente.

[114] Ver nota 30, p. 47 (pp. 3 y 11y ss.); Alanen y Knuuttila, "The foundations of Modality...", pp. x-xii.

9.4 Lógica reciente

9.4.1 Sintaxis modal e implicación

En la época actual de la lógica (la de la "simbólica" o "matemática"), surgida alrededor de 1850, la modal tardó en desarrollarse. Frege, pionero alemán de la lógica alrededor de 1900, no trató porque creía que pertenecía a la psicología, no a la lógica. Es curioso que rechazó el psicologismo en la lógica en general pero con los psicologistas relegó la modalidad al conocimiento.[115]

Un momento importante del interés actual en la modalidad comenzó en torno a una dificultad con la implicación material de Russell y Whitehead. La implicación "si p entonces q" ($p > q$) se ve como equivalente a "p no sin q" ($\sim[p \ \& \ \sim q]$). Esta interpretación de la palabra "si" garantiza la validez de la regla **mp**, pero conduce a dos paradojas notadas ya por el Pseudoescoto en la Edad Media. Cada proposición implica toda proposición; se trata del principio escolástico *ex falso sequitur quodlibet*:

1	$\sim p$	**h**
2	$\quad p$	**h**
3	$\quad \sim p$	1 **i**
4	$\quad q$	2, 3 **eng**
5	$p > q$	2-4 **ii**

Y cada proposición V es implicada por toda proposición; el principio escolástico *verum sequitur ex quolibet* o la tautología de la repetición condicionada (1.3.2):

1	p	**h**
2	$\quad q$	**h**
3	$\quad p$	1 **i**
4	$q > p$	2-3 **ii**

La siguiente verdad lógica también es paradójica:

$$[p > q] \vee [q > p]$$

Cualquier proposición implica o es implicada por cualquier otra.

[115] Haaparanta, "Frege...", *Modern Modalities*, pp. 239 y ss.

Para evitar estos problemas, C. I. Lewis dijo que $p > q$ vale ssi es *imposible* que p sea V y q, F: $\sim\Diamond[p \,\&\, \sim q]$, y llamó esta implicación "*estricta*":[116]

$p \rightarrow q$

en el sentido de $\sim\Diamond[p \,\&\, \sim q]$

Sin embargo, su concepción de la implicación no eliminó las paradojas, porque ahora cada proposición *imposible* implica toda proposición estrictamente —el principio escolástico *ex impossibili sequitur quodlibet*—, y cada proposición *necesaria* es implicada estrictamente por toda proposición —el principio *necessarium sequitur ex quolibet*—:

1	$\sim\Diamond p$	**h**
2	$\Box$ p	**h**
3	$\sim p$	1 **i**(T)
4	q	2,3 **eng**
5	$p > q$	2-4 **ii**
6	$\Box[p > q]$	2-5 **in**
7	$q \rightarrow p$	6 $\mathbf{r}_{df}$

1	$\Box p$	**h**
2	$\Box$ q	**h**
3	p	1 **i** (T)
4	$q > p$	2-3 **ii**
5	$\Box[q > p]$	2-4 **in**
6	$q \rightarrow p$	5 $\mathbf{r}_{df}$

Como parte de la misma discusión se han propuesto otros tipos de implicación, como la de la relevancia (1.1.4.4). El aspecto importante de la implicación material es que asegura la validez de la regla **mp**; el de la estricta es que garantiza la validez de la regla **mpe.**

Por otro lado, a Ruth Barcan Marcus debemos una lógica modal de los predicados y a Frederic B. Fitch un sistema modal de la deducción natural.[117]

9.4.2 Semántica de los mundos posibles

Antes de la elaboración de la semántica modal formal, había cierta renuencia a aceptar la lógica modal. La situación cambió como consecuencia de la teoría de los mundos posibles de Kripke (1959) y

[116] En 1918, *A Survey of Symbolic Logic*, siguiendo a MacColl, 1906; Lewis publicó *Symbolic Logic* con C. H. Langford (1932).

[117] Barcan: "A Funcional Calculus of First Order Based on Strict Implication", *Journal of Symbolic Logic*, 1946; Fitch: prefacio.

Hintikka. Como Leibniz, Kripke interpretó $\Box p$ como "p es V en todo mundo posible" y $\Diamond p$ como "p es V en al menos un mundo posible". Se ha dicho que el "indiscutible mérito" del trabajo de Kripke fue "que la lógica modal fuese tomada en serio por los lógicos, quienes antes habían recelado de ella y que se enardeciese una discusión científica de alto nivel en torno a su semántica".[118]

9.4.3 Otras voces

La filosofía fenomenológica de este siglo también incorporó análisis interesantes de la modalidad. P. ej., Heidegger dijo que el ser humano es su posibilidad (*Möglichkeit*), su poder-ser (*Sein-können*). Para Husserl la modalidad pertenece no a la mente sino a lo apriorístico de la experiencia y el análisis fenomenológico, prescindiendo de la atribución de la existencia (*Daseinsthesis*) del objeto, está centrado en los mundos posibles.

Para Sartre el ser humano, el *pour-soi* (para-sí), "niquila" el *en-soi* (en-sí), la facticidad, lo que existe sin tener que existir, en favor de la *trascendence*, la nada (*néant*), el poder-ser. La contingencia "sartreana", $p \ \& \ \Diamond{\sim}p$ (4.1.5.3) emerge como un rasgo fundamental del ser. En este pasaje conocido de *La Nausée*, el antihéroe Roquentin describe su experiencia "óntica" de la contingencia del castaño absurdo, "obsceno" en su existencia:

> lo esencial es la contingencia...
> la existencia no puede definirse como necesidad,
> el existir no es sino estar ahí.

Los teístas, dice, tratan de

> superar la contingencia inventando un ser necesario,

sin embargo:

> ningún ser necesario puede explicar la existencia;
> la contingencia no es delusión.

Roquentin agrega:

> he aquí el asco;

La realidad y nosotros mismos somos en el fondo "de más (*de trop*)", superfluos (14.6.2).
Se han comentado mucho los aforismos enigmáticos de la fundamentalidad de la posibilidad en el *Tratado lógicofilosófico* de Wittgenstein; se trata de un "espacio lógico", esfera de vigencia de las proposiciones:

> El mundo [real] es todo lo que es el caso, la totalidad de los hechos, los cuales —y por ser *todos* los hechos— determinan el mundo y son el mundo en el espacio lógico...

[118] Hans Burkhardt, p. 256.

El hecho es la existencia (*Bestehen*) de situaciones (*Sachverhalte*), y la situación es combinación de objetos (cosas)...

> En la lógica nada es accidental; si la cosa en la situación *puede* suceder, la posibilidad de la situación tiene que estar ya inscrita en la cosa... Si las cosas pueden suceder en las situaciones, esto ya tiene que estar en ellas... Si bien puedo pensar el objeto en asociación con la situación, no puedo pensarlo fuera de la *posibilidad* de tal asociación...
>
> Al conocer el objeto, conozco también todas las posibilidades de su suceder en situaciones (cada una de tales posibilidades tiene que estar en la naturaleza del objeto). No puede hallarse posteriormente ninguna posibilidad nueva...
>
> Si se dan todos los objetos, también se dan, por lo mismo, todas las situaciones *posibles*. Cada cosa está, por así decirlo, en un espacio de posibles situaciones; el espacio puede pensarse vacío pero la cosa no puede pensarse sin el espacio.[119]

Para filósofos tan distintos como Aristóteles, Escoto, Leibniz, Kant, Wittgenstein y Heidegger, pues, la modalidad es un aspecto importante de la experiencia humana y, para muchos también, del ser.

[119] Entre proposiciones 1 y 2.013.

Capítulo 10

MUNDOS POSIBLES

10.1 Reglas e iteración

Es evidente, con ayuda de la intuición de los mundos posibles, por qué lo que se itera en la subprueba estricta debe ser necesario. Tomemos este ejemplo (*C*: "4 + 4 = 8"; *T*: "3 + 3 = 6"):

1	$\Box C$	**h**
2	$\Box T$	**h**
3	$\Box$ | C	**i** (T)
4	| T	**i** (T)
5	| $C \& T$	2, 3 **ic**
6	$\Box[C \& T]$	3-5 **in**

Si queremos afirmar mediante la regla **in** que la conjunción de *C* y *T* es necesaria (paso 6), tenemos que asegurarnos de que *C* es V en cada mundo posible (paso 1) y de que *T* es V lo es también (paso 2). La restricción de la iteración garantiza que cualquier proposición que aparezca en la subprueba estricta sea V en todos los mundos posibles.

Pero puede resultar sorprendente que cuando se trata de la regla **ep**, la subprueba tenga que ser general; p. ej., en (*L*: llueve):

1	$\Diamond L$	**h**
2	$\Box C$	**h**
3	$\Box$ | L	**h**
4	| C	**i** (T)
5	| $L \& C$	2, 3 **ic**
6	$\Diamond[L \& C]$	3-5 **ep**

El uso de los mundos posibles muestra claramente por qué es así. Digamos que no hay más que dos mundos. Queremos demostrar que llueve y que 4 + 4 = 8 en al menos uno de ellos (paso 6). El paso 2 nos dice que *C* es V en ambos mundos y el paso 1 nos dice que *L* es V en al menos uno de ellos (sin decirnos en cuál). Cuando iteramos *C* en la subprueba, pues, sabiendo que es V en ambos mundos, estamos "cubriendo todas las posibilidades".

Esta explicación del sentido de las subpruebas naturalmente se aplica a las interpretaciones no aléticas de la modalidad formal (13.6). P. ej., si sabe Fulano que llueve y es posible hasta donde sepa que haga frío, entonces, por así decirlo, desde la perspectiva de su conocimiento, llueve en todos los mundos y hace frío en al menos uno. Que sepa Fulano, pues, es posible que llueva y haga frío.

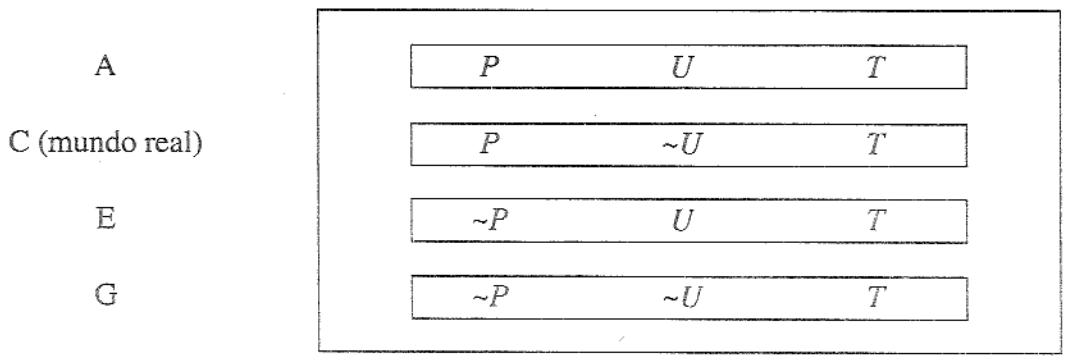
10.2 Proposiciones y mundos posibles

Un conjunto de proposiciones especifica un mundo posible. Para mostrar esto, usemos una variante del ejemplo anterior (9.3), donde *P*: "hay perros", *U*: "hay unicornios" y *T*: "3 + 3 = 6":

renglón	*P*	*U*	*T*	*modalidad*
A	1	1	1	posible (no real)
B	~~1~~	~~1~~	~~0~~	imposible
C	1	0	1	**posible y real**
D	~~1~~	~~0~~	~~0~~	imposible
E	0	1	1	posible (no real)
F	~~0~~	~~1~~	~~0~~	imposible
G	0	0	1	posible (no real)
H	~~0~~	~~0~~	~~0~~	imposible

Cada renglón representa un conjunto de los distintos valores veritativos (no hay más combinaciones posibles). Son imposibles las circunstancias indicadas por los renglones tachados B, D, F y H, porque en ellos la proposición necesaria *T* es F; por lo tanto, estos renglones no representan ningún mundo posible. Los demás renglones indican mundos posibles. Cada proposición, en efecto, puede verse como relacionada con una situación de un mundo posible. P. ej., en el mundo posible del renglón C, la proposición *P* es V porque corresponde a la situación de haber perros y *U* es F porque corresponde a la de no haber unicornios (o, si se prefiere, porque no corresponde a ninguna situación de haber unicornios).

En este esquema, las letras indican las situaciones en cada mundo posible:



Observe:

- El renglón C representa el mundo real, porque en él es V que 3 + 3 = 6 y que hay perros, pero es F que haya unicornios.

- *T* es necesario porque es V en todo mundo posible (en cada renglón menos los excluidos por imposibles); por lo tanto: $\Box T$.

- *T* es también real, porque es V en el mundo real (renglón C); la letra *T* sin operador puede significar que es V en algún mundo específico que escojamos (p. ej., el real).

- *T* es también posible, porque es V en al menos un mundo posible (¡es V en todos!); así pues: $\Diamond T$.

- Tanto *P* como *U* son posibles, porque hay un mundo en que cada uno es V (*P* es V en A y B, y *U* es V en A y E); por lo tanto, $\Diamond P$ y $\Diamond U$. Y porque la conjunción de *P* y *U* es V en al menos un mundo (en A), es también posible: $\Diamond[P \,\&\, U]$.

- *U* es "meramente posible" en el sentido de que no es V en el mundo real pero sí es V en otro mundo (en A y E): $\Diamond U \,\&\, {\sim}U$.

- *P* es contingente en el sentido sartreano, pues es V en el mundo real y falso en otro mundo (E y G): $P \,\&\, {\sim}P$.

- Tanto *P* como *U* son proposiciones contingentes, porque hay un mundo en que son V y uno en que son F (*P* es F en E y *G*, y *U* es F en C y G). Así pues: ∇P y ∇U; prueba de ∇P:

1	$\Diamond P$	**h** (porque *P* es V en A y C)
2	$\Diamond{\sim}P$	**h** (porque no *P* es V en E y G)
3	$\Diamond P \,\&\, \Diamond{\sim}P$	1, 2 **ic**
4	∇P	3 $\mathbf{r}_{df}$

(el mismo proceso se lleva a cabo en el caso de *U*).

- la proposición (molecular) $U \,\&\, {\sim}U$ (hay unicornios y no los hay) no es V en ningún mundo; $U \,\&\, {\sim}U$ es, pues, una proposición imposible: ${\sim}\Diamond[U \,\&\, {\sim}U]$. En cambio, $U \vee {\sim}U$ es necesario, V en todo mundo: $\Box[U \vee {\sim}U]$.

10.3 Estructura de un mundo posible

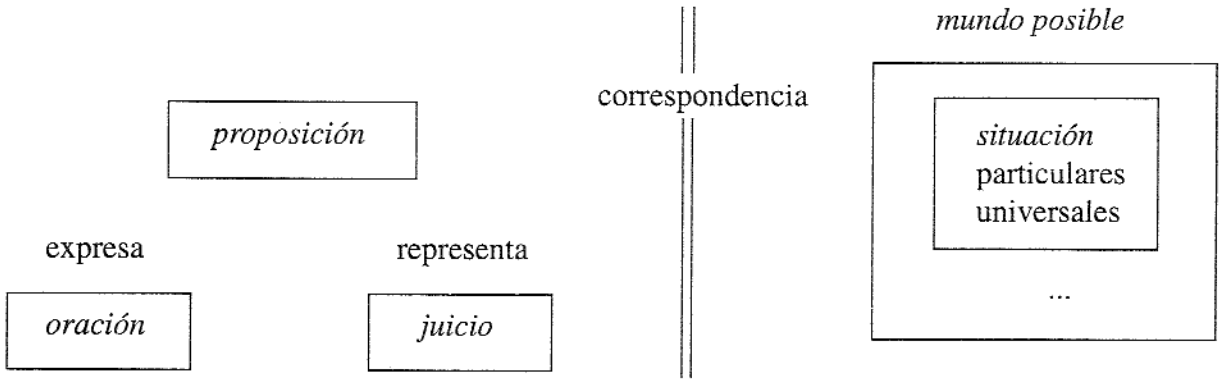
10.3.1 La situación

Como dijo Wittgenstein, la proposición, como una partitura de música, es "articulada" y su estructura refleja de algún modo la de la situación, y también la de la oración o del juicio (2.1.4). Russell habló de constituyentes y componentes y Molina de las "cosas" y las "circunstancias" de los *ordines* (8.2.1, 9.2.3), elementos que corresponden a los símbolos de la lógica predicativa (2.1.5). También puede usarse la siguiente terminología tradicional de los integrantes de una situación:

> lo *particular*: individuos, "cosas" u objetos en el sentido más general: entes materiales, leptones y cuarcos, fotones y gravitones, personas, actos, eventos, acontecimientos, entes abstractos. Ejemplos son: este electrón, Napoleón, Jumbo, la puñalada de Bruto contra César, el yelmo de Mambrino, el invento de la rueda, el descubridor de Urano, seis, la proposición de estar Berlín en Alemania (e, n, j, p, y, i, u o ιxUx, 6, B).
>
> lo *universal*: propiedades, rasgos, atributos, cualidades, etc. Son monádicos, propiedades sencillas como rojo, verdear, correr, perro, o poliádicos (Rx, Vx, Cx, Px), relaciones como ser mayor que, amar, dar, saber ($x > y$, Axy, $Dxyz$, Sfp).

Note que esta distinción no es igual a aquella entre lo concreto y lo abstracto, pues si bien lo universal es abstracto, los particulares son tanto concretos (Napoleón) como abstractos (seis). El mundo "de abajo" de Platón, pues, incluye las cosas concretas particulares. En la filosofía se ha distinguido el ser particular concreto en material (el descubridor de Urano) y no material (Dios).

Una proposición es V si la situación es así (8.2.1). Las proposiciones no son ni situaciones ni mundos posibles. Éstas constan de situaciones. El siguiente esquema, pues, indica una manera correspondencial de entender estas relaciones:



Hay que definir el tipo de particular y universal que se asocian con un mundo posible.

10.3.2 Contenido del mundo posible

Es importante especificar lo que un mundo posible contiene, porque el contenido determinará la semántica. Se han descrito los mundos posibles de varias maneras.[120] P. ej., podemos concebirlos de tal manera que cada uno contiene todos los objetos del mundo real pero tiene otras propiedades (sencillas y relacionales) en los mundos no reales (meramente posibles). En este caso, César habita todo mundo posible, pero en algunos no cruzó el Rubicón. Segundo, podemos decir que los no reales contienen no sólo los objetos del real (con distintas propiedades) sino además otros, como la don Quijote. En tercer lugar, podríamos decir que ciertos mundos meramente posibles tienen menos objetos que el mundo real (César no está en todo mundo posible). Según esta concepción:

- hay mundos meramente posibles que contienen los mismos objetos que el mundo real pero con distintas propiedades.
- hay otros que contienen más objetos que el mundo real.
- hay otros que contienen menos objetos que el mundo real.

Generalmente se presupone la tercera concepción del mundo posible, e. d., sin *ninguna restricción* en torno a los objetos. Algunos filósofos sostienen que las propiedades están en todo mundo posible pero no se ejemplifican en todo mundo posible (13.4.2).

Se ha discutido la cuestión de la identidad "transmundial" de los objetos, e. d., su presencia a través de los mundos posibles. Para Leibniz, un individuo no habita sino un mundo posible (9.3). Gilberto Porretano, Plantinga y la mayoría de los semanticistas modales actuales opinan que el mismo individuo está en varios mundos (9.2.3). Plantinga no cree que sea necesario exigir criterios para la identidad de los objetos. Algunos sostienen que hay un conjunto de propiedades que son esenciales a cada objeto y que lo acompañan en todo mundo posible donde esté. Estas propiedades no pueden variar sin que el individuo deje de ser el mismo, pero otras propiedades accidentales o contingentes pueden convenirle sin afectar su identidad. P. ej., Sócrates tiene la propiedad de ser humano en todo mundo donde está, pero en algunos no es chato ni calvo. Por otro lado, no es necesario atribuir el sentido de las propiedades esenciales precisamente a un nombre propio como "Sócrates", pues puede considerarse como puramente denotante.

Kripke, como vimos (2.1.6), interpreta los nombres propios o, en los sistemas lógicos, las constantes singulares, como designadores rígidos. Quiere decir que los nombres, a diferencia de las descripciones definidas, designan los mismos objetos en todos los mundos posibles en que está. P. ej., el nombre "Cervantes" designa rígidamente al mismo hombre en todo mundo en que está, pero la descripción "el autor del *Quijote*" lo designa sólo en aquellos mundos en que escribió *El Quijote*, pues hay mundos que Cervantes habita sin escribir esa obra. Además, dice, si dos nombres propios designan el mismo objeto, lo designan en todo mundo posible; la proposición de que la estrella matutina es la vespertina sería necesaria: $\Box\ (m = v)$ (12.2.4).

El sentido de los mundos variará según las interpretaciones de los operadores sintácticos. En las lógicas modales no aléticas, pues, los mundos ya no significan lo "real" en el sentido amplio. Cuando se

[120] Hughes y Cresswell, pp. 177 y ss.

trata del saber y del creer, los mundos constan de las situaciones que son objeto del saber y creer; en la lógica deóntica, de las situaciones moralmente significativas, y en la temporal, de las situaciones ubicadas en el tiempo (13.6).

10.4 Modos y cuantificación

Los modos pueden definirse por medio de la cuantificación sobre los mundos posibles. La relación entre la proposición y los mundos posibles es expresable con el símblo $V^x p$: "es V en el mundo x que p". Las definiciones serían (Mx: x es un mundo posible):

- posibilidad, $\Diamond p$: $Ex[Mx \,\&\, V^x p]$ (hay al menos un mundo posible x en que p es V)
- necesidad, $\Box p$: $Ux[Mx > V^x p]$ (p es V en todo mundo x)
- imposibilidad, $\sim\Diamond p$: $\sim[Mx \,\&\, ExV^x p]$ (no hay ningún mundo x en que p sea V) o equivalentemente $Ux[Mx > \sim V^x p]$ (p no es V en ningún mundo x)
- innecesidad, $\sim\Box p$: $\sim Ux[Mx > V^x p]$ (no es cierto que p sea V en todo mundo x), o $Ex[Mx \,\&\, \sim V^x p]$ (hay al menos un mundo x en que p no es V)
- contingencia, ∇p: $Ex[Mx \,\&\, V^x p] \,\&\, Ex[Mx \,\&\, \sim V^x p]$ (hay un mundo x en que p es V y hay un mundo x en que $\sim p$ es V)
- incontingencia, $\sim\nabla p$: $Ux[Mx > \sim V^x p] \vee Ux[Mx > V^x p]$ (p es F en todo mundo o es V en todo mundo, e. d., es imposible o necesario)

En el cuadro de oposición correspondiente limitamos el dominio de los cuantificadores a los mundos posibles (4.1.8):

$\Box p$	$\sim\Diamond p$ ($<> \Box\sim p$)
$UxV^x p$	$\sim ExV^x p$ ($<> Ux\sim V^x p$)
$\Diamond p$	$\sim\Box p$ ($<> \Diamond\sim p$)
$ExV^x p$	$\sim UxV^x p$ ($<> Ex\sim V^x p$)

∇p
$ExV^x p \,\&\, Ex\sim V^x p$

Se expresarían las correspondencias de interdefinibilidad **pn** de esta manera (4.1.8):

$\mathrm{E}x\mathrm{V}^x p$	$\sim\mathrm{U}x\sim\mathrm{V}^x p$
$\sim\mathrm{E}x\mathrm{V}^x p$	$\mathrm{U}x\sim\mathrm{V}^x p$
$\mathrm{E}x\sim\mathrm{V}^x p$	$\sim\mathrm{U}x\mathrm{V}^x p$
$\sim\mathrm{E}x\sim\mathrm{V}^x p$	$\mathrm{U}x\mathrm{V}^x p$

Ahora salta a la vista el paralelismo que hemos notado (4.1.7, 12.2.1) entre los cuantificadores y los operadores modales (*m*: un mundo posible específico):

1	$\sim\mathrm{U}x\mathrm{V}^x p$		1	$\sim\Diamond p$	
2	$\mathrm{U}x\sim\mathrm{V}^x p$	1 **sh**	2	$\Box\sim p$	1 **pn**

también entre las reglas:

1	$\mathrm{U}x\mathrm{V}^x p$	**h**	1	$\Box p$	**h**
2	$\mathrm{V}^m p$	1 **ecu** *m/x*	2	p	1 **ep**
1	$\mathrm{V}^m p$	**h**	1	p	**h**
2	$\mathrm{E}x\mathrm{V}^x p$	1 **ice** *x/m*	2	$\Diamond p$	1 **pn**

En vez de *m*, podríamos haber escrito el nombre de cualquier mundo posible, incluso el real.

Teóricamente podríamos prescindir de los operadores modales ($\Box$, $\Diamond$, ∇) y reemplazarlos con la cuantificación sobre los mundos posibles. En este caso harían falta varias reglas que permiten el manejo de las inferencias lógicas dentro de un mundo posible. Digamos que es V en el mundo de *El Quijote* (M^q) que don Quijote saca su espada (*S*) y embraza su rodela (*E*); tenemos, pues, $\mathrm{V}^q[S \,\&\, E]$. Si queremos inferir que don Quijote saca su espada, $\mathrm{V}^q S$, necesitamos una regla (**iv**), que exija una subprueba en la que las fórmulas gobernadas por el predicado V^u se iteran (sin el predicado) y las consecuencias lógicas se sacan (con el predicado):

1	V^u	...	
n		A	
$n+1$	$\mathrm{V}^u A$		1-*n* **iv**

donde *u* puede ser una constante o una variable. Así que se puede hacer esto:

1	$V^q[S \& E]$	**h**
2	V^q | $S \& E$	1 **i**
3	| S	2 **ec**
4	$V^q S$	2-3 **iv**

Veremos una aplicación de tales procedimientos (13.4.4).

Capítulo 11

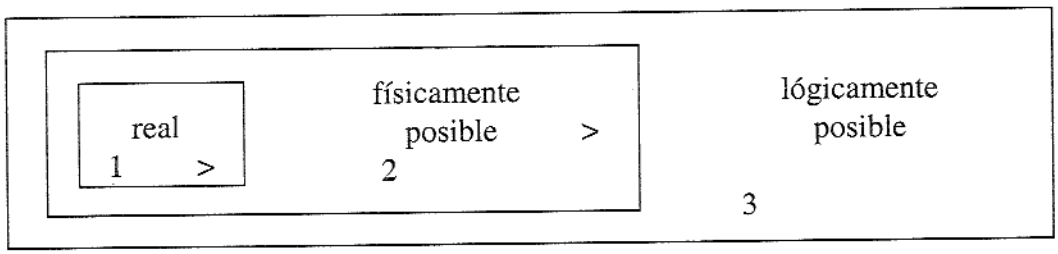
COSMOGRAMAS

11.1 Clases de mundos

Distinguimos entre posibilidad física, conceptual y lógica (8.4.2). El siguiente diagrama indica tres tipos de mundos posibles (se omite la posibilidad conceptual). Se distinguen de lo imposible (no es usual hablar de "mundos imposibles"). La línea doble marca la frontera entre el ser sin más, la "realidad" en el sentido amplio, y la nada (8.3.1).

REAL	FÍSICAMENTE POSIBLE	LÓGICAMENTE POSIBLE	*1*. mundo real (y física y lógicamente posible)
no real			*2*. mundos no reales pero física y lógicamente posibles
	físicamente imposible		*3*. mundos ni reales ni físicamente posibles pero lógicamente posibles
		lógicamente imposible	[lo imposible, nada]

Otro esquema que representa la misma división:



Ejemplos del segundo tipo, los mundos no reales pero físicamente posibles, son el trasfondo ontológico de *Don Quijote* (Cervantes), *La guerra y paz* (Tolstoi) o *Las sillas* (Ionesco). Ejemplos del tercer tipo, los mundos lógicamente posibles en los que están vigentes leyes físicas distintas de las nuestras, son los mundos detrás de *El Rinoceronte* (Ionesco) y *Cien años de soledad* (García Márquez), pues en ellos los hombres se convierten en rinocerontes y los gitanos vuelan en alfombras mágicas.

11.2 Modos y cosmogramas

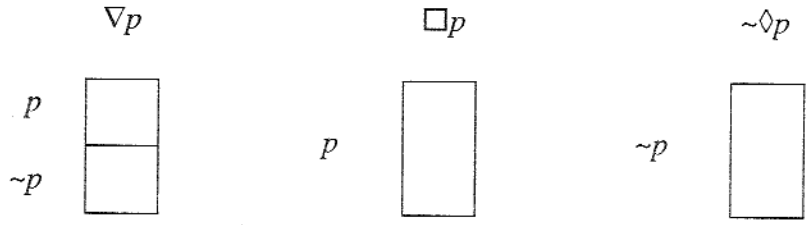
La proposición asertórica es o V o F. Pero modalmente, cuando la verdad se considera como relativa a los mundos posibles (8.1.2), una proposición puede ser necesariamente V, imposiblemente V y contingente, posiblemente V y posiblemente F. Hay, pues, tres clases fundamentales de la proposición modal:

1) contingente, $\Diamond p$ & $\Diamond{\sim}p$; las que son V en al menos un mundo y F en al menos un mundo

2) necesaria, $\Box p$; V en todo mundo

3) imposible, ${\sim}\Diamond p$; V en ningún mundo; F en todo mundo

Representamos el conjunto del número infinito de mundos posibles con un *cosmograma*.[121] Con su ayuda podemos exhibir las diferencias entre los tres tipos de proposición:



El rectángulo completo contiene todos los mundos posibles (un número infinito). P. ej., en el segundo cosmograma, el cual representa la proposición necesaria, $\Box p$, p es V en todo mundo posible. Hay dos sectores en el primer cosmograma, el cual simboliza una proposición contingente, ∇p, la cual es V en algunos mundos posibles y F en los otros, o sea que ${\sim}p$ es V en los otros. El sector de arriba simboliza los mundos en que p es V y el de abajo los mundos en que ${\sim}p$ es V (p es F).

Note que cada proposición (atómica o molecular) tiene su propio cosmograma y cada cosmograma representa el total (infinito) de mundos posibles. Toda proposición contingente dividirá el conjunto de los mundos en dos sectores: uno de mundos en los que es V y otro en que es F. A su vez, cada sector puede contener un número infinito de mundos. El real se encuentra en el sector superior si p es realmente V o en el sector inferior si p es realmente F (si ${\sim}p$ es realmente V). Unos ejemplos:

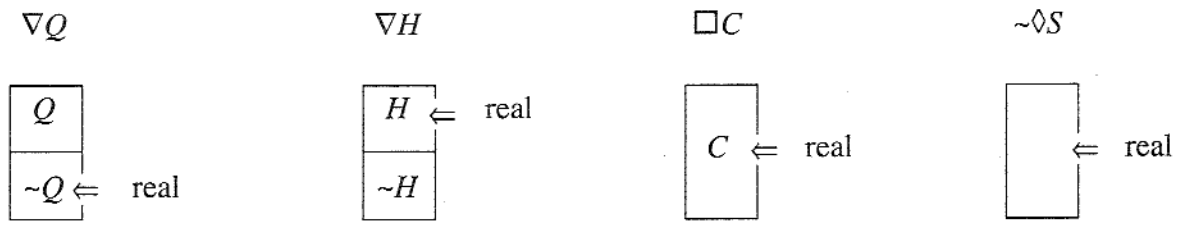
- Q: "don Quijote sacó su espada y embrazó su rodela y arremetió al vizcaíno" (∇Q); el mundo real en este caso está en el sector de abajo

[121] Tomo la representación (con modificaciones) de Raymond Bradley y Norman Schwartz, *Possible Worlds/An Introduction to Logic and its Philosophy* (Hackett, 1979), p. 254.

- *H*: "*hasta* se expresa en quechua con la posposición '*qqaya*' " (∇H); en este caso, el mundo real está en el sector superior

- *C*: "2 + 2 = 4" ($\Box C$); es V en todo mundo posible

- *S*: "2 + 2 = 6" ($\sim\Diamond S$); no es V en ningún mundo posible



Note que el mundo real evidentemente nunca se encuentra fuera del cosmograma.

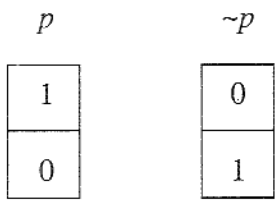
11.3 Relaciones proposicionales modales

En la lógica asertórica definimos la negación y las relaciones interproposicionales por la función veritativa. De las 16 posibles conexiones binarias, entresacamos las que son más corrientes en el lenguaje ordinario o útiles en la filosofía: conjunción, disyunción, implicación, equivalencia, no-conjunción y no-equivalencia (1.1.3).

Estas conectivas indican las relaciones entre las situaciones de un mundo posible. Cuando tomamos la modalidad en cuenta, tenemos que describir los valores veritativos a través de todos los mundos posibles. Examinaremos estas relaciones ahora con la ayuda de los cosmogramas.

11.3.1 Cosmogramas para varias proposiciones

Hemos visto (11.2) que sólo hacen falta tres cosmogramas para describir las circunstancias modales de una sola proposición. En cuanto a la negación de una proposición, $\sim p$ (la negación de p) es V en todo mundo (si en efecto hay tal mundo) en que p es F, y $\sim p$ es F en todo mundo en que p es V. Tomemos el caso de la contingencia; los dos cosmogramas para p y para $\sim p$ serían:



Combinaremos los dos esquemas en un solo cosmograma de la siguiente manera, pues queremos mostrar la relación entre las dos proposiciones a través de todos los mundos posibles:

p	$\sim p$
1	0
0	1

Podemos indicar la negación de las tres clases básicas de proposiciones modales así:

∇p

p	$\sim p$
1	0
0	1

$\Box p$

p	$\sim p$
1	0

$\sim\Diamond p$

p	$\sim p$
0	1

Evidentemente, si p es necesaria, $\sim p$ es imposible, y si p es imposible, $\sim p$ es necesario.

Para describir las circunstancias de las relaciones modales entre dos proposiciones, ya que cada una de éstas tiene su propio cosmograma, necesitamos 15 cosmogramas.[122] La primera proposición (p) está representada en la mitad del cosmograma que está a la izquierda y la segunda (q) en la que está a la derecha. Las indicamos con letras para facilitar la referencia.

A

1	1

B

1	0

C

0	1

D

0	0

E

1	1
1	0

F

1	1
0	1

G

1	1
0	0

H

1	0
0	1

I

1	0
0	0

J

0	1
0	0

K

1	1
1	0
0	0

L

1	0
1	1
0	1

M

1	1
0	1
0	0

N

1	0
0	0
0	1

[122] El número de cosmogramas = 2 a la potencia de 2 a la potencia del número de proposiciones menos 1: $2^4 - 1 = 15$. Una sola proposición tiene tres cosmogramas ($2^2 - 1 = 3$) y tres proposiciones requieren 255 ($2^8 - 1 = 255$).

O

1	1
1	0
0	1
0	0

Por ejemplo, en el cosmograma *N*, hay tres disposiciones permitidas: *p* es V y *q* es F en al menos un mundo posible (1-0), *p* y *q* son F en al menos un mundo (0-0) y *p* es F y *q* es V en al menos un mundo (0-1). Los tres sectores del cosmograma indican estas circunstancias: el primero (1-0) incluye los mundos en que *p* es V y *q*, F; el segundo (0-0) aquellos en que los dos son F y el tercero (0-1) en la que *p* es F y *q*,V.

N

p es V	1	0	*q* es F
p es F	0	0	*q* es F
p es F	0	1	*q* es V

Dos proposiciones que caben en este patrón son:

p: César precipitó la guerra civil (cruzando el Rubicón) en 50 a.C.
q: César precipitó la guerra civil en 40 a.C.

Vale el primer sector (1-0), porque es posible que César haya precipitado la guerra en 50 (y no en 40), y vale el último (0-1), porque es posible que la haya precipitado en 40 (no en 50). También vale el sector en medio (0-0) porque es posible que César no haya precipitado la guerra civil ni en 50 ni en 40; el mundo real se encuentra aquí, porque "en realidad" cruzó el Rubicón en 49 a.C.

En cambio, la combinación imposible es 1-1, pues es imposible que César haya precipitado la guerra civil tanto en 50 como en 40. Por eso vale el cosmograma *N* de la relación modal entre estas dos proposiciones, y no en un cosmograma que permite la combinación 1-1. Tales proposiciones son *inconsistentes*, porque no pueden ser ambas V. El cosmograma *N*, pues, muestra una forma de la inconsistencia (hay otras, como veremos adelante).

Note que ambas proposiciones, *p* y *q*, son incontingentes en los cosmogramas *A-D*; e. d., son imposibles o necesarias, pues $\sim\nabla p =_{df} [\sim\Diamond p \vee \Box p]$. Y en *G*, *H* y *K-O* las dos son contingentes. Una es contingente y la otra no-contingente en *E*, *F*, *I* y *J*.

No se puede reducir el número de los cosmogramas, a propósito, combinando los complementarios (*B-C*, *E-F*, *I-J*,...), porque el orden de los valores veritativos puede ser significativo.

11.3.2 Ejemplos

A continuación damos ejemplos de dos proposiciones que caben en cada cosmograma:

A $\begin{cases} p\text{: } 3 + 3 = 6\ (\Box p) \\ q\text{: Napoleón ganó en Waterloo o Napoleón perdió en Waterloo } (\Box[q \vee \sim q]) \end{cases}$

B $\begin{cases} p\text{: Cada cosa azul tiene color } (\Box p) \\ q\text{: Napoleón ganó en Waterloo y Napoleón no ganó en Waterloo } (\sim\Diamond[q \,\&\, \sim q]) \end{cases}$

C (B al revés)

D $\begin{cases} p\text{: El desembarque de Colón ocurrió fuera del tiempo } (\sim\Diamond p) \\ q\text{: } 3 + 3 = 8\ (\sim\Diamond q) \end{cases}$

E $\begin{cases} p\text{: Todo es idéntico consigo mismo } (\Box p) \\ q\text{: Quijote arremetió contra los molinos de viento } (\nabla q) \end{cases}$

F (E al revés)

G $\begin{cases} p\text{: Habrá un temblor en Perú el 31 de diciembre } (\nabla p) \\ q\text{: Temblará en Perú en el último día del año } (\nabla q) \end{cases}$

H $\begin{cases} p\text{: Colón desembarcó en América en 1492 } (\nabla p) \\ q\text{: Colón no desembarcó en América en 1492 } (\nabla \sim p) \end{cases}$

I $\begin{cases} p\text{: Colón desembarcó en América en 1492 } (\nabla p) \\ q\text{: Carlos v sabía que } 3 + 3 = 8\ (\sim\Diamond p) \end{cases}$

J (I al revés)

K $\begin{cases} p\text{: Colón desembarcó en América en el siglo quince } (\nabla p) \\ q\text{: Colón desembarcó en América en 1492 } (\nabla q) \end{cases}$

L $\begin{cases} p\text{: Algo es inteligente } (\nabla \mathrm{E}xFx) \\ q\text{: Algo no es inteligente } (\nabla \mathrm{E}x{\sim}Fx) \end{cases}$

M (K al revés)

N $\begin{cases} p\text{: César precipitó la guerra civil en 50 a.C. } (\nabla p) \\ q\text{: César precipitó la guerra civil en 40 a.C. } (\nabla q) \end{cases}$

O $\begin{cases} p\text{: César precipitó la guerra civil en 49 a.C. } (\nabla q) \\ q\text{: El coronel Aureliano Buendía recordó cuando su papá lo llevó a conocer el hielo } (\nabla q) \end{cases}$

Nos vamos a referir a los cosmogramas con sus letras según este esquema:

	A	*B*	*C*	*D*	
E	*F*	*G*	*H*	*I*	J
	K	*L*	*M*	*N*	
		O			

Podemos referirnos, p. ej., a las relaciones entre proposiciones contingentes así:

	.	.	.	.	
.	.	*G*	*H*	.	.
	K	*L*	*M*	*N*	
		O			

11.4 Algunas relaciones proposicionales

Veamos algunas relaciones útiles en el contexto modal. Notemos primero que podemos llamar "estricta" una conexión proposicional modal necesaria. Es costumbre hablar de la implicación estricta: $\Box[p > q]$ (o $p \rightarrow q$), para distinguirla de la material $p > q$ (4.1.6, 9.4.1), pero también podemos referirnos a fórmulas tales como $\Box[p \,\&\, q]$ y $\Box[p \vee q]$ como la conjunción y disyunción estrictas.

11.4.1 Consistencia

La consistencia corresponde a la conjunción en la lógica asertórica. Dos proposiciones son consistentes ssi su conjunción (1-1) es *posible*: $\Diamond[p \,\&\, q]$, e. d., si hay al menos un mundo en que son V ($\mathrm{E}x[\mathrm{V}^x p \,\&\, \mathrm{V}^x q]$). Se emplea frecuentemente esta definición o abreviatura:

$$p \circ q =_{\mathrm{df}} \Diamond[p \,\&\, q]$$

Por lo tanto, para representar la consistencia, debemos escoger todos los cosmogramas que tengan la combinación 1-1, porque este sector simboliza los mundos posibles en que p y q son V. Hay ocho mundos así:

	A	.	.	.	
E	*F*	*G*	.	.	.
	K	*L*	*M*	.	
		O			

A muestra que cualquier proposición necesaria es consistente con cualquier otra también necesaria (*A* representa la "conjunción estricta" $\Box[p \,\&\, q]$). *D* muestra que toda proposición necesaria es consistente con cualquier proposición contingente (claro, podría entenderse "consistente" sólo en el mundo real, y en ese caso serían "inconsistentes: "2 + 2 = 4" y "los gitanos volaron en la alfombra mágica"). En los demás cosmogramas (*G*, *K*, *L*, *M*, *O*) ambas proposiciones son contingentes.

11.4.2 Inconsistencia

La inconsistencia corresponde a la no-conjunción asertórica "no a la vez" ($p \mid q$), e. d., a la relación de la contrariedad del cuadro escolástico de oposición. Dos proposiciones son inconsistentes ssi su conjunción es *imposible*: $\sim\Diamond[p \,\&\, q]$ (o $\Box[p \mid q]$ o $\sim[p \circ q]$). O sea que no hay ningún mundo en que ambos sean V ($\sim Ex[V^x p \,\&\, V^x q]$).

Por eso, para representar la inconsistencia debemos escoger los cosmogramas en que falte 1-1. Son la "otra mitad" de la consistencia:

	.	*B*	*C*	*D*	
.	.	.	*H*	*I*	*J*
	.	.	.	*N*	
		.			

11.4.3 Contradicción

Puede llamarse contradicción la versión modal de la no-equivalencia o "disyunción exclusiva": $\Box[p \,\langle/\rangle\, q]$. Se trata de la disyunción exclusiva estricta. Dos proposiciones contradictorias en este sentido no pueden ser V ni F juntas: $\sim\Diamond[p \,\&\, q] \,\&\, \sim\Diamond[\sim p \,\&\, \sim q]$; no hay mundo en que ambos sean V ni F ($\sim Ex[V^x p \,\&\, V^x q] \,\&\, \sim Ex[\sim V^x p \,\&\, \sim V^x q]$). Los representan pues los cosmogramas que no tienen 1-1 ni 0-0:

	.	*B*	*C*	.	
.	.	.	*H*	.	.
	.	.	.	.	
		.			

11.4.4 Implicación

En la implicación estricta, $\Box[p > q]$, abreviada como $p \rightarrow q$, p no puede ser V sin serlo q; por lo tanto, la representan los cosmogramas en que no aparezca 1-0:

	A	.	*C*	*D*	
.	*F*	*G*	.	.	*J*
	.	.	*M*	.	
		.			

La implicación material $p > q$ podría ser cualquier sector 1-1, 0-1 o 0-0 en cualquier cosmograma (también en los de la estricta), todos menos *B*. Digamos que es V que todos los franceses tienen los ojos azules; este mundo posible, pues, pertenece al sector de un cosmograma que reúne los mundos en que es V que si se es francés, se tiene los ojos azules: 1-1, 0-1 y 0-0. Se trata de los renglones 1, 3 y 4 del cosmograma *O*. En el otro sector del cosmograma, renglón 2, en el que está situado el mundo real, es F, pues en el mundo real hay franceses que no tienen los ojos azules. Por lo tanto, todos los casos de la implicación estricta también lo son de la implicación material, pero no al revés (claro, se podría definir la material como "meramente material" para excluir la estricta: *E*, *H*, *I*, *K*, *L*, *N*, *O*).

11.4.5 Independencia

El cosmograma *O* muestra el caso en que las dos proposiciones no guardan ninguna relación lógica la una con la otra; mejor dicho, la única relación lógica que las liga es la de la independencia. Todas las conjunciones son posibles: $p \,\&\, q$, $p \,\&\, {\sim}q$, ${\sim}p \,\&\, q$ y ${\sim}p \,\&\, {\sim}q$.

Evidentemente, podría aplicarse el mismo análisis a las demás relaciones proposicionales. Lo esencial es que el hecho de ser V o F una proposición repercute, por así decirlo, a través de todos los mundos posibles.

11.5 Propiedades y mundos

Exhibimos ahora dentro del contexto modal el cuadro tradicional de proposiciones cuantificadas:

SaP	*N*	*SeP*
M	*H*	*M*
SiP	*L*	*SoP*

El cosmograma *N* representa la relación de la contrariedad (*SaP* sería la proposición de la izquierda en el cosmograma y *SeP* la de la derecha). L representa la subcontrariedad (entre *SiP* y *SoP*) y *H* la contradicción (entre *SaP* y *SoP* y entre *SiP* y *SeP*). *M* representa la subalternación (entre *SaP* y *SiP* y entre *SeP* y *SoP*). Naturalmente, se presupone el compromiso existencial para las proposiciones universales *SaP* y *SeP* (2.2.4).

También podemos emplear semejantes procedimientos para averiguar la relación modal entre cualesquiera dos proposiciones (no se limita a dos, porque pueden combinarse binariamente cualquier número de proposiciones).

Podemos hablar de las características de las propiedades universales. P. ej., puede llamarse "necesario" un universal que convenga a todos los particulares en todos los mundos posibles; la autoidentidad, si vale $\Box Ux(x = x)$, ejemplifica tal característica. Una propiedad universal puede convenir a los entes necesariamente en otro sentido de "necesario": cuando conviene a por lo menos un particular en todo mundo posible; tal característica es ejemplificada por la propiedad de ser un número primo (Px: x es un número primo): $\Box ExPx$, pues hay números primos en todo mundo posible. Otro ejemplo es la propiedad de ser lo más grande en todo mundo posible; Dios sería el único particular que tuviera esta propiedad (14.6.2.1). Una propiedad puede llamarse "contingente" en el sentido de que hay mundos en que conviene a algo y otros en que no conviene a nada.

Los universales pueden ser necesariamente equivalentes en el sentido de aplicarse a los mismos particulares: $\Box Ux[Fx <> Gx]$. Pero tales propiedades evidentemente no significan lo mismo (su denotación o referencia es igual pero su connotación es distinta). Algunas de las propiedades que los escolásticos llamaban *propria* son equivalentes en este sentido, como también las que Kant asoció a los predicados en los juicios sintéticos *a priori*.

Puede resumirse el empleo de los cosmogramas de la manera siguiente. Las proposiciones especifican las situaciones de un mundo posible. Hay varios tipos de proposiciones modales y, por ende, de situaciones, las cuales se relacionan lógicamente de varias maneras. Los cosmogramas muestran cómo cualesquiera dos (o más) situaciones se relacionan a través de los mundos posibles.

Capítulo 12

LOS SISTEMAS MODALES: T Y S4

12.1 Iteración y sistemas

Hemos desarrollado tres sistemas de la lógica modal en la parte sintáctica: T, S4 y S5, los que Hughes y Cresswell escogen para un análisis especial (después examinan casi una veintena de otros sistemas). Consideran que T refleja todas nuestras expectativas en torno a los modos, pero que S5 es el sistema básico y "absoluto" en el sentido de que corresponde mejor a nuestras intuiciones de los mundos posibles. Hacemos unos comentarios ahora a los sistemas T, S4, y veremos S5 en el próximo capítulo.

Veamos primero la razón de las restricciones de iteración en las subpruebas estrictas. Recuerde que distinguimos los sistemas simplemente controlando la iteración en las subpruebas "estrictas" según el cuadro de oposición (4.5):

$$\Box p \qquad\qquad \sim\Diamond p$$

$$\Diamond p \qquad\qquad \sim\Box p$$

$$\nabla p$$

- en T: pueden iterarse sólo los modos superiores ($\Box p$ y $\sim\Diamond p$) y hay que quitar los operadores modales; e. d., hay que iterarlos como p y $\sim p$
- en S4: pueden iterarse los modos superiores junto con sus operadores modales; e.d., se pueden iterar como $\Box p$ y $\sim\Diamond p$
- en S5: pueden iterarse todos los modos (también ∇p) y hay que guardar los operadores; o sea que pueden iterarse tales como aparecen en el cuadro de oposición.

Cualquier proposición que se itere en una subprueba estricta debe ser V en todo mundo posible, e. d., debe ser necesaria (10.1). Ahora bien, los tres sistemas difieren en lo que cuenta como proposición necesaria (4.9):

- en T no puede demostrarse que ninguna proposición modal sea necesaria; por lo tanto, sólo p y $\sim p$, si son necesarios (si $\Box p$ y $\Box\sim p$ o $\sim\Diamond p$: las que están en el renglón superior en el cuadro), pueden iterarse, como p y $\sim p$

- en S4 se presupone que las proposiciones necesarias, $\Box p$ y $\Box\sim p$ o $\sim\Diamond p$ (las superiores en el cuadro) son, ellas mismas, necesarias ($\Box\Box p$ y $\Box\Box\sim p$ o $\Box\sim\Diamond p$); por ende pueden iterarse, como $\Box p$ y $\Box\sim p$ o $\sim\Diamond p$

- en S5 todas las proposiciones modales del cuadro son necesarias; por consiguiente, también $\Diamond p$ y $\Diamond\sim p$ son iterables, porque $\Diamond p$ y $\Diamond\sim p$ o $\sim\Box p$ son necesarios ($\Box\Diamond p$ y $\Box\Diamond\sim p$ o $\Box\sim\Box p$), incluso ∇p, porque ∇p es necesario ($\Box\nabla p$)— como $\Diamond p$, $\Diamond\sim p$ o $\sim\Box p$ y ∇p.

Veamos ahora algunas diferencias entre los sistemas T, S4 y S5. Discutiremos la asequibilidad en T y S4 en el contexto de S5 (13.5.3).

12.2 El sistema T

12.2.1 En general

Lo "típico" de T son las reglas **en** e **ip** y la iteración sin el operador de las proposiciones superiores en el cuadro de oposición:

$$\Box p \qquad\qquad \sim\Diamond p$$

El sistema T representa la necesidad de la lógica elemental: puede demostrarse en él que todo teorema es una proposición necesaria, pues cada uno puede ser introducido mediante la regla in. La repetición condicionada servirá como ejemplo (1.32, 4.1.5.2):

1	$\Box$ | p	**h**
2	| q	**h**
3	| p	1 **i**
4	| $q > p$	2-3 **ii**
5	$p > [q > p]$	1-4 **ii**
6	$\Box[p > [q > p]]$	1-5 **in**

Las cuatro reglas modales de T, las cuales capturan las intuiciones de la modalidad, también valen en S4 y S5.

La regla **ep** demuestra otro principio de la lógica modal:

1	$\Box[p > q]$	**h**
2	$\Diamond p$	**h**
3	$\Box$ p	**h**
4	$p > q$	1 **i** (T)
5	q	3, 4 **mp**
6	$\Diamond q$	2, 3-5 **ep**
7	$\Diamond p > \Diamond q$	2-6 **ii**
8	$\Box[p > q] > [\Diamond p > \Diamond q]$	

12.2.2 Pluralidad de operadores

Algunos principios de la reducción y multiplicación de los operadores modales amontonados son fácilmente demostrables en T (4.9):

A1:	$\Box\Box p > \Box p$	(regla: **en**)
A2:	$\Diamond p > \Diamond\Diamond p$	(regla: **ip**)
A3:	$\Box p > \Diamond\Box p$	(regla: **ip**)
A4:	$\Box\Diamond p > \Diamond p$	(regla: **en**)

Las implicaciones se leen así:

A1: si es necesario que sea necesario que p, entonces es necesario que p
A2: si es posible que p, entonces es posible que sea posible que p
A3: si es necesario que p, entonces es posible que sea necesario que p
A4: si es necesario que sea posible que p, entonces es posible que p

Es importante ver que en T estas implicaciones no son equivalencias (coimplicaciones), pues no podemos derivarlas en sentido contrario. Indicamos estas implicaciones inversas con el apóstrofe: A1', A2', A3', A4'. Claro que podemos demostrar en T otras fórmulas que contienen una pluralidad de operadores, p. ej., $\Box\Box p > \Diamond p$, $\Box p > \Diamond\Diamond p$, $\Box p > \Box\Diamond p$ y $\Diamond\Box p > \Diamond p$.

12.2.3 Los anillos

En cuanto a la lógica modal predicativa, podemos probar en T todas las implicaciones señaladas por las flechas en el diagrama de los anillos (4.1.9) menos las fórmulas de Barcan (4.7):

	$\Box \mathrm{U}xFx$	
contrabarcaneanas	$\downarrow\uparrow$	*barcaneanas*
	$\mathrm{U}x\Box Fx$	
	...	
	$\mathrm{E}x\Diamond Fx$	
contrabarcaneanas	$\downarrow\uparrow$	*barcaneanas*
	$\Diamond \mathrm{E}xFx.$	

Las fórmulas de Barcan, demostrables en S5 (13.4), serían derivables si una proposición de la forma $\mathrm{U}x\Box\phi$ fuera iterable en una subprueba estricta. Tal procedimiento no acarrearía ninguna inconsistencia.[123]

Damos unos ejemplos de otras implicaciones de los anillos, las contrabarcaneanas y las de Buridano, todas demostrables en T.[124]

1		$\Box \mathrm{U}xFx$	**h**
2	x	$\Box$ $\mathrm{U}xFx$	1 **i**
3		Fx	2 **ecu**
4		$\Box Fx$	2-3 **in**
5		$\mathrm{U}x\Box Fx$	2-4 **icu**

1		$\Diamond \mathrm{U}xFx$	**h**
2	x	$\Diamond \mathrm{U}xFx$	1 **i**
3		$\Box$ $\mathrm{U}xFx$	**h**
4		Fx	3 **ecu**
5		$\Diamond Fx$	2, 3-4 **ep**
6		$\mathrm{U}x\Diamond Fx$	2-5 **icu**

1		$\mathrm{E}x\Box Fx$	**h**
2	x	$\Box Fx$	**h**
3		$\Box$ Fx	2 **i**
4		$\mathrm{E}xFx$	3 **ice**
5		$\Box \mathrm{E}xFx$	3-4**in**
6		$\Box \mathrm{E}xFx$	1, 2-5 **ece**

[123] Habría que quitar el operador modal al iterar la expresión; e. d., iterando $\mathrm{U}x\Box p$ como $\mathrm{U}xp$, si se quisiera evitar los resultados permitidos en S4.

[124] Unidad de ejercicios 28, C2 y C3 y unidad 29, B2 y B3.

1	$Ex\Diamond Fx$	**h**
2	$x \mid \Diamond Fx$	**h**
3	$\Box \mid Fx$	**h**
4	$\mid ExFx$	3 **ice**
5	$\mid \Diamond ExFx$	2, 3-4 **ep**
6	$\Diamond ExFx$	2-4 **ece**

Hay problemas interpretativos con las implicaciones de Buridano y los consideraremos más adelante (13.4).

12.2.4 Identidad

La identidad involucra problemas especiales en el contexto de la modalidad (3.4.2, 14.3.4). Hemos visto que la lógica de la identidad cuenta con un axioma (**ai**) y una regla (**ei**). El primero es una expresión del principio de la autoidentidad: cada cosa es idéntica consigo misma: $Ux(x = x)$. Es por eso que una proposición de la forma

$$T = T$$

puede introducirse como paso en cualquier prueba, donde T es un término de un individuo (constante o variable). Sin embargo, si la expresión $Ex(x = a)$ se usa para expresar la existencia de a, $a = a$ debe aplicarse a algo existente (3.2.1, 3.1.3, 3.4).

La regla **ei** representa el principio leibniziano de la indiscernibilidad de la identidad: si dos cosas son idénticas tienen las mismas propiedades. Por lo tanto podemos reemplazar, *salva veritate*, un término que hace las veces de la una con uno que hace las veces de la otra. P. ej., porque la estrella vespertina y la matutina son idénticas (con Venus), podemos decir que si la estrella matutina es la vespertina y aquélla se levanta en la mañana, entonces ésta también se levanta en la mañana (3.2.2).

Si permitimos que **ie** opere a través de un operador modal (o una subprueba estricta), podemos probar en T que todas las proposiciones de identidad son necesarias: $(m = v) > \Box(m = v)$. Por ejemplo:

1	$m = v$	**h**
2	$\Box \mid m = m$	**ai**
3	$\Box (m = m)$	2 **in**
4	$\Box (m = v)$	1, 3 **ei**

Hay una dificultad filosófica en torno a este procedimiento que se ha discutido mucho. Hemos visto (10.3.2) que para Kripke los nombres propios son designadores rígidos y que es necesaria la afirmación de que dos nombres designen el mismo individuo. Sin embargo, no parece ser *necesario*, sino contingente, que el planeta llamado "la estrella matutina" sea el planteta llamado "la estrella vespertina".

Algunos bloquearían la aplicación de **ei** en el contexto modal; e. d., no permitirían la sustitución en ninguna expresión que sea regida por el operador modal ni que aparezca en una subprueba estricta:

NO	1	$m = v$	**h**
	2	$\Box(m = m)$	**h**
		$\Box(m = v)$	—**ei** no puede aplicarse

NO	1	$m = v$	**h**
	2	$\Box$ $m = m$	**ai**
		$m = v$	—**ei** no puede aplicarse
	3	$\Box$ $(m = v)$	(**in**)

Además, si es cierto que si la estrella vespertina es idéntica consigo misma en todo mundo posible, $\Box(v = v)$, entonces hay en todo mundo algo que es necesariamente idéntico con la estrella matutina. Quine usó esta paradoja como motivo para rechazar la lógica modal. Pues la prueba

1	$\Box$ $v = v$	**ai**
2	$\Box$ $(v = v)$	1 **in**
3	$Ex\Box(x = v)$	2 **ice**

se sigue según las tres reglas, pero la conclusión parece ser F: que haya algo que tiene que ser idéntico con la estrella vespertina. Se ha sugerido que es F en la interpretación objetual del cuantificador existencial y V en la sustitucional (2.2.8.2), pues según ésta, sólo dice que algún ejemplo de $\Box(x = v)$, a saber $\Box(v = v)$, es V.

Una manera de evitar esta consecuencia es pedir que **ai** sea necesaria cuando se usa en una subprueba estricta; no podríamos hacer esto:

NO	1	$\Box$ $v = v$	—**ai** no puede emplearse
	2	$\Box$ $(v = v)$	(**in**)
	3	$Ex\Box(x = v)$	(**ice**)

ni tampoco:

NO	1	$\Box \quad v = v$	—**ai** no puede emplearse
	2	$\quad \mid \; Ex(x = v)$	(**in**)
	3	$\Box Ex(x = v)$	(**ice**)

Sin embargo, en algunos casos puede afirmarse que una identidad es necesaria, p. ej., de lo que se halla en todo mundo posible; los números serían un ejemplo,

1	$\Box(7 = 7)$	**h**
2	$\Box \mid \; 7 = 7$	1 **i** (T)
	...	

Quine también exhibió la siguiente prueba como objeción a la modalidad, donde n es el número de los planetas (9):

1	$\Box(9 > 7)$	**h**
2	$9 = n$	**h**
3	$\Box(n > 7)$	1, 2 **ei**

El tercer paso parece ser F porque no es necesario, sino contingente, que el número de los planetas sea mayor que siete. Fitch y A. Smullyan salen de la dificultad usando la descripción ιxNx ("el número de los planetas") en vez del nombre n. "El número de los planetas es mayor que 7" sería: $\Box(\iota xNx > 7)$, fórmula que se define (3.1.3) como:

$$Ex[Uy[Ny <> x = y] \;\&\; \Box(x > 7)]$$

o sea que hay algo (a saber, 9) que contingentemente numera los planetas y que necesariamente es mayor que siete.[125] Pero que algunas cosas tengan sus propiedades necesariamente, la tesis del esencialismo (9.2.2, 11.5, 13.4.2), tampoco le gusta a Quine; no quiere que un cuantificador ligue variables en un contexto modal (como en la fórmula de arriba). Sin embargo, otros, como Marcus, Kripke y Plantinga, han defendido el esencialismo. En verdad no parece haber por qué algo no pueda tener tanto propiedades contingentes como propiedades necesarias.

[125] Smullyan, "Modality and Description", *Journal of Symbolic Logic*, 13, 1948.

Si se permitiera ciertas operaciones, tendríamos también el teorema paralelo de que toda *falta* de identidad es necesaria: $(p \neq n) > \Box(p \neq n)$; p. ej., si el papa no es Napoleón, entonces es necesario que no lo sea. Agregamos la prueba aquí, pero hay que recordar que es demostrable sólo en S5 (p: el papa y n: Napoleón):

1	$\sim(p = n)$	**h**
2	$\Diamond\sim(p = n)$	1 **ip**
3	$\sim\Box(p = n)$	2 **pn**
4	$\Box$ | c | $p = n$	**h**
5	$\Box$ | $p = p$	**ai**
6	$\Box\ (p = p)$	5 **in**
7	$\Box\ (p = n)$	4, 6 **ei**
8	$\sim\Box\ (p = n)$	3 **i** (S5)
9	$\sim (p = n)$	4-8 **ing**
10	$\Box\sim (p = n)$	4-9 **in**

12.3 El sistema S4

En S4 podemos iterar las formas superiores del cuadro de oposición junto con los operadores modales:

$$\Box p \qquad \sim\Diamond p$$

Lo "típico" de S4 es la validez de la inversa de los primeros dos principios de reducción:

A1': $\Box p > \Box\Box p$

A2': $\Diamond\Diamond p > \Diamond p$

Aquí están las pruebas:

1	$\Box p$	**h**
2	$\Box$ | $\Box p$	1 **i** (S4)
3	$\Box\Box p$	2 **in**
4	$\Box p > \Box\Box p$	1-3 **ii**

1	$\Diamond\Diamond p$	**h**
2	c $\quad \sim\Diamond p$	**h**
3	$\Box \quad \sim\Diamond p$	2 **i** (S4)
4	$\Box\sim\Diamond p$	3 **in**
5	$\sim\Diamond\Diamond p$	4 **pn**
6	$\Diamond\Diamond p$	1 **i**
7	$\Diamond p$	2-6 **ing**
8	$\Diamond\Diamond p > \Diamond p$	1-7 **ii**

En S4, pues, la necesidad es necesaria, pero sólo en S5 puede demostrarse que la posibilidad y la contingencia (A3' y A4') son necesarias (13.2). Sin embargo, puede establecerse en S4 la necesidad de sus formas negativas, e. d., de la imposibilidad y de la incontingencia; por ejemplo:

1	$\sim\Diamond p$	**h**
2	$\Box \quad \sim\Diamond p$	1 **i** (S4)
3	$\Box\sim\Diamond p$	2 **in**
4	$\sim\Diamond p > \Box\sim\Diamond p$	1-3 **ii**

Las fórmulas de Barcan tampoco son demostrables en S4, pero pueden agregarse sin afectar la consistencia del sistema.

Capítulo 13

EL SISTEMA MODAL S5

13.1 S5 entre los sistemas modales

Hughes y Cresswell comentaron,[126] refiriéndose a la "familiar idea filosófica" de que una proposición necesaria es V no sólo en el mundo real sino también en cada otro mundo posible:

> de los sistemas que hemos considerado, S5 es el que más directamente parece expresar esta idea, puesto que en este modelo la verdad de p en cada mundo en W [el conjunto de los mundos posibles] se requiere para la verdad de $\Box p$ en cualquiera de ellos.

En contraste con T y S4,

> S5 refleja el sentido "absoluto" de la palabra "concebible", un sentido, según el cual, decir que una situación es concebible es decir algo sobre *ella*, sin referencia a los poderes de concebir, los cuales pueden existir o no en cualquier otra situación.

No es menester, pues, usar el concepto de la concebibilidad cuando hablamos de la posibilidad (8.4.2), y así se libera del psicologismo.

El sentido de "necesario", "posible" y de otros términos afines variará según el sistema modal de que se trata. Se han sugerido las siguientes traducciones de "necesario":

- en T: "es demostrable informalmente en las matemáticas que"
- en S5: "es analíticamente el caso que"

Hughes y Cresswell agregan:

> Así es que de una u otra manera la multiplicidad de los sistemas modales, lejos de ser síntoma de confusión o causa de perplejidad, puede en efecto ser una ayuda positiva para notar distinciones que de lo contrario podrían pasar desapercibidas.[127]

---

[126] Pp. 76 y 79.

[127] Sugerencias de E. J. Lemmon, "Is there only one correct system of modal logic?", *Aristotelian Society, tomo suplementario,* XXXIII (1959), citado en Hughes y Cresswell, p. 80.

Los varios sistemas formales tienen distintas aplicaciones. Veremos ahora algunas propiedades de S5.

13.2 Necesidad de los modos

Puesto que todos los modos son necesarios en S5, en él podemos iterar todas las formas del cuadro escolástico de la oposición modal, incluso la de la contingencia:

$$\Box p \qquad\qquad \sim\Diamond p$$

$$\Diamond p \qquad\qquad \sim\Box p$$

$$\nabla p$$

Una consecuencia de esta flexibilidad es que todos los modos, incluso sus negaciones, son necesarios:

• necesidad:	$\Box p$	>	$\Box\Box p$	S4	(A1')
• posibilidad:	$\Diamond p$	>	$\Box\Diamond p$	S5	(A4')
• contingencia:	∇p	>	$\Box\nabla p$	S5	
• innecesidad:	$\sim\Box p$	>	$\Box\sim\Box p$	S5	
• imposibilidad:	$\sim\Diamond p$	>	$\Box\sim\Diamond p$	S4	
• incontingencia:	$\sim\nabla p$	>	$\Box\sim\nabla p$	S4	

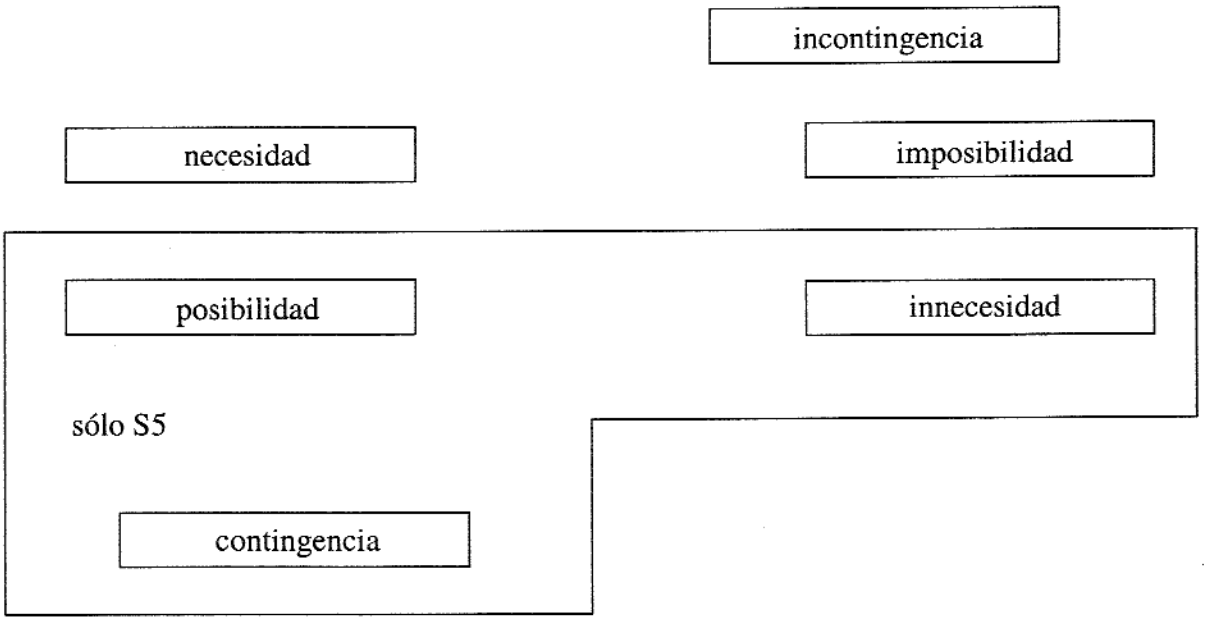
La necesidad de los modos positivos se muestra así:

1	$\Box p$	1	$\Diamond p$	1	∇p	**h**
2	$\Box \quad \Box p$	2	$\Box \quad \Diamond p$	2	$\Box \quad \nabla p$	1 **i**
3	$\Box\Box p$	3	$\Box\Diamond p$	3	$\Box\nabla p$	2 **in**

donde la primera iteración en paso 2 se hace en S4 y las últimas dos en S5. Sólo en S5 puede probarse que la innecesidad es necesaria:

1	$\sim\Box p$	
2	$\Box \mid \sim\Box p$	1 **i** (S5)
3	$\Box p \sim\Box p$	2 **in**

Se despliega en el cuadro así:



La necesidad de los modos no carece de interés ontológico.

13.3 Reducción completa

La necesidad de los modos son casos específicos de la acumulación y simplificación de los operadores modales. De estas implicaciones, cuatro: A1, A2, A3 y A4, son demostrables en T y éstas más: A1' y A2' en S4. Sólo en S5 pueden demostrarse:

A3': $\Diamond\Box p > \Box p$

A4': $\Diamond p > \Box\Diamond p$

y esto es lo "típico" de S5; es válido, pues, el conjunto completo de las implicaciones (4.5).[128] Pueden glosarse de la siguiente manera:

A3': si en un mundo es verdad que en todo mundo 2 + 2 = 4, entonces 2 + 2 = 4 en todo mundo.

A4': si hay ornitorrincos en un mundo, entonces es verdad en todo mundo que los hay en un mundo.

[128] Y en el sistema brouweriano, contenido en S5 (valen $\Diamond\Box p > \Box p$ y $\Diamond p > \Box\Diamond p$ y las fórmulas de Barcan.

Las pruebas:

1	$\Diamond\Box p$	**h**
2	c $\sim\Box p$	**h**
3	$\Diamond\Box p$	1 **i**
4	$\Box$ $\sim\Box p$	2 **i** (S5)
5	$\Box\sim\Box p$	4 **in**
6	$\sim\Diamond\Box p$	5 **pn**
7	$\Box p$	2-6 **ing**
8	$\Diamond\Box p > \Box p$	1-7 **ii**

1	$\Diamond p$	**h**
2	$\Box$ $\Diamond p$	1 **i** (S5)
3	$\Box\Diamond p$	1 **in**
4	$\Diamond p > \Box\Diamond p$	1-3 **ii**

13.4 Interpretación de los anillos

13.4.1 Problemas con los anillos

Hasta ahora hemos incorporado la predicativa normal en la lógica modal, p. ej., en la presentación de los anillos. Los procedimientos que usamos no ofrecen ningún problema sintáctico, es decir, formal.[129] Sin embargo, cuando empleamos la semántica de los mundos posibles para interpretar los sistemas cuantificados, surgen ciertas dificultades en torno a seis fórmulas (4.1.9, 4.7, 12.2.3):

1. dos de Barcan
2. dos contrabarcaneanas
3. dos de Buridano

[129] S. Kripke, "A Completeness Theorem in Modal Logic", *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 24, núm.1 (marzo de 1959), pp. 1-14; también Hughes y Cresswell.

Recuerde que las conversas de las de Buridano ($Ux\Diamond Fx > \Diamond UxFx$ y $\Box ExFx > Ex\Box Fx$) no se admiten en ningún sistema. Hay, en efecto, una discusión compleja en torno al sentido y a la validez de estas expresiones, y aquí no deseamos sino introducir la cuestión.[130]

El problema toca todos los sistemas modales que hemos examinado, porque son demostrables las implicaciones:

- de Barcan en S5
- de Buridano y las contrabarcaneanas en T (también en S4 y S5)

Los lógicos hablan de dos versiones de T y S4, una que admite y la otra que excluye las fórmulas de Barcan (Fitch dice que podrían introducirse consistentemente en T y S4 como reglas, pero agrega que la segunda es "menos claramente válida" que la primera).[131] Y se han formulado sistemas de S5 que excluyen todas o algunas de las seis fórmulas discutibles.

El problema es que hay aparentes contraejemplos en el contexto de los mundos posibles.[132] ¿Cómo excluir, pues, una implicación que contradice nuestras expectativas filosóficas, cuando los sistemas formales que la permiten parecen funcionar? Un contraejemplo que hace cuestionar la implicación de Buridano, $\Diamond UxFx > Ux\Diamond Fx$ fue sugerido por Buridano mismo (*G*: "ser idéntico con Dios"):

$$\Diamond UxGx > Ux\Diamond Gx$$

Si en un mundo posible lo único que existe es Dios, luego todo ente en un mundo específico, digamos el real, *puede* ser Dios, lo cual es F, porque ni siquiera es posible que Napoleón, digamos, sea Dios. También hay un problema con la fórmula paralela (*S*: "ser idéntico con Sócrates"):

$$Ex\Box Sx > \Box ExSx$$

Pues si en algún mundo, digamos en el real, Sócrates tiene la propiedad de ser idéntico con Sócrates necesariamente, entonces en todo mundo posible hay algo idéntico con Sócrates. Y este resultado implica que los mundos contienen los mismos individuos, y esto a su vez entraña la conclusión absurda de que existan necesariamente.

También la fórmula de Barcan parece implicar que los mundos posibles contienen los mismos individuos. En la implicación (*H*: "hipopótamo"):

$$Ux\Box Hx > \Box UxHx$$

el antecedente dice que en un mundo hay un individuo que es un hipopótamo necesariamente, e. d., es un hipopótamo en todo mundo en que está. Pero el consecuente dice que en todo mundo posible todo es hipopótamo, lo que puede ser V sólo si no hay sino hipopótamos en cada mundo.

[130] Consúltese en este párrafo a Ken Konyndyk, *Introductory Modal Logic*, capítulo 4, pp.77 y ss.

[131] P. 170 y p. 165 respectivamente.

[132] Plantinga, *The Nature of Necessity*, cap. 4, párr. 9.

13.4.2 Esencialismo

Antes de repasar las soluciones del problema, presentemos la noción del esencialismo (12.2.4), la cual es presupuesta en la discusión. Según esta teoría una cosa tiene algunas propiedades esencialmente y otras de manera accidental. Se emplea la modalidad *de re* para indicar cómo una propiedad conviene a la cosa modalmente (9.2.2). De las proposiciones:

Sócrates es esencialmente racional
Sócrates es accidentalmente chato
Es necesario que Sócrates sea racional

las dos primeras son *de re* y V, pero la tercera es *de dicto* y F, pues parece implicar que Sócrates existe necesariamente. Según el esencialismo, una cosa individual está en un mundo meramente posible (no real) si existiera (realmente), si ese mundo fuera real. El individuo a tiene una propiedad esencialmente ssi a la tiene en todo mundo en que está, lo cual podría expresarse así (3.1.3): F es una propiedad esencial de a ssi

$$\Box[\mathrm{E}x(x = a) > Fa]$$

y F es una propiedad accidental o contingente ssi la tiene en al menos un mundo en que está:

$$\Diamond[\mathrm{E}x(x = a) \ \& \ Fa]$$

Un ejemplo de una propiedad que conviene esencialmente es la propiedad universal de la autoidentidad: $\Box \mathrm{U}x\Box(x = x)$ (11.5). La existencia también siempre "conviene" esencialmente:

1	$\Box$	$\mathrm{E}x(x = s)$	**h**
2		$\mathrm{E}x(x = s)$	1 **r**
3		$\mathrm{E}x(x = s) > \mathrm{E}x(x = s)$	1-2 **ii**
4		$\Box[\mathrm{E}x(x = s) > \mathrm{E}x(x = s)]$	1-3 **in**

El cuarto paso tiene la forma $\Box[\mathrm{E}x(x = a) > Fa]$ (con $\mathrm{E}x(x = s)$ en vez de Fa) y dice que Sócrates tiene la existencia esencialmente: existe en todo mundo en que está (*no* significa que exista necesariamente: $\Box\mathrm{E}x(x = s)$).

La cuestión de la *esencia individual* se plantea en este contexto. Plantinga la definió como una propiedad (o un conjunto de propiedades) que está ejemplificada en algún mundo de tal manera que en todo mundo conviene esencialmente a toda cosa que la tiene y no conviene a ninguna otra en ningún mundo posible.[133] Las siguientes fórmulas se leen de acuerdo con esta definición así:

> $\mathrm{E}xFx$: alguna esencia en el dominio de las esencias en algún mundo (p. ej., el real) está ejemplificada con la propiedad F, e. d., hay al menos una cosa a que convienen tanto su esencia como la propiedad F.

[133] *The Nature of Necessity*, cap. 5.

$Ux\Diamond Fx$: cada esencia ejemplificada en un mundo particular lo está en algún mundo posible junto con la propiedad F.

$\Diamond ExFx$: en algún mundo posible, al menos una esencia de las que estarían ejemplificadas si tal mundo fuera real, también está ejemplificada con la propiedad F.

Una esencia individual está en todo mundo posible, pero no está ejemplificada en todo mundo posible.

13.4.3 Soluciones

Una manera de evitar los resultados indeseables de las fórmulas de Barcan sería restringir la concepción de la propiedad esencial, estipulando, p. ej., que todas las propiedades esenciales son universales: convienen a todo ente en todo mundo posible (11.5). Las propiedades esenciales entonces serían como la autoidentidad (o propiedades "triviales" como el ser-verde-o-no-verde). Si metemos la autoidentidad en la fórmula de Barcan, tenemos:

$$Ux\Box(x = x) > \Box Ux(x = x)$$

Es decir, si en un mundo específico todo es esencialmente idéntico consigo mismo, entonces en todo mundo posible todo es idéntico consigo mismo. Esta implicación no parece tener dificultades. Esta restricción solucionaría *a fortiori* el problema en torno a las fórmulas de Buridano.

Kripke, para resolver tales enigmas y formular lo que cree que es el debido sistema S5 cuantificado, propuso unas restricciones que impiden todo intercambio de cuantificadores y operadores modales.[134] La medida suprime no sólo las implicaciones de Barcan y Buridano, sino también las contrabarcaneanas, con el resultado de que se elimina todo contacto entre los anillos exterior e interior.

Las restricciones atañen a las reglas **in** y **ep** y podrían expresarse informalmente así:

1. *Un paso justificado por* **in** *o* **ep** *no debe contener ninguna variable libre la cual haya sido introducida por* **ecu** *o* **ece** *dentro de la subprueba estricta.*

2. *El paso justificado por* **in** *o* **ep** *no debe seguirse de uno en la subprueba estricta a que se haya aplicado* **ice** *o* **icu** *y contenga una variable libre que también lo fuese antes de la subprueba.*

Por ejemplo, la primera restricción bloquea la contrabarcaneana (compárese con 12.2.3):

[134] "Semantical Considerations on Modal Logic", *Acta Philosophica*, fasc. xvi, pp. 83-94 y "Semantical Analysis of Modal Logic I: Normal Modal Propositional Calculi", *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, tomo 9, pp. 63-96.

1	$\Box \mathrm{U}xFx$		
2	$x \mid \Box \mid \mathrm{U}xFx$		
3	Fx	2 **ecu**	— introducido por **ecu** en subprueba
4	$\Box Fx$	2-3 **in**	— x es libre— VIOLACIÓN
5	$\mathrm{U}x\Box Fx$		

y la de Buridano:

1	$\Diamond \mathrm{U}xFx$		
2	$x \mid \Diamond \mathrm{U}xFx$		
3	$\Box \mid \mathrm{U}xFx$		
4	Fx	2 **ecu**	— introducido por **ecu** en subprueba
5	$\Diamond Fx$	1, 2-3 **ep**	— x es libre— VIOLACIÓN
6	$\mathrm{U}x\Diamond Fx$		

La segunda restricción bloquea, p. ej., la contrabarcaneana:

1	$\mathrm{E}x\Box Fx$		
2	$x \mid \Box Fx$		— x es libre antes de la subprueba
3	$\Box \mid Fx$	2 **i**	— x es libre e **ice** le es aplicado
4	$\mathrm{E}xFx$	3 **ice**	
5	$\Box \mathrm{E}xFx$	3-4 **in**	— VIOLACIÓN
6	$\Box \mathrm{E}xFx$		

Esta solución de Kripke ha sido criticada por impedir demasiado. Específicamente, se ha querido retener las contrabarcaneanas, las cuales no ofrecen tantos problemas como las de Barcan y Buridano. Además, el rechazo por Kripke de estas fórmulas parece acarrear que las únicas propiedades esenciales de los entes contingentes son universales en el sentido de ser aplicables a todo ente en todo mundo posible, como la autoidentidad.

13.4.4 Solución actualista

Se ha llamado "actualismo" a la teoría de los mundos posibles que reconoce, fuera de éstos, las situaciones y proposiciones, las propiedades y los objetos posibles (los que no existen en el mundo real pero

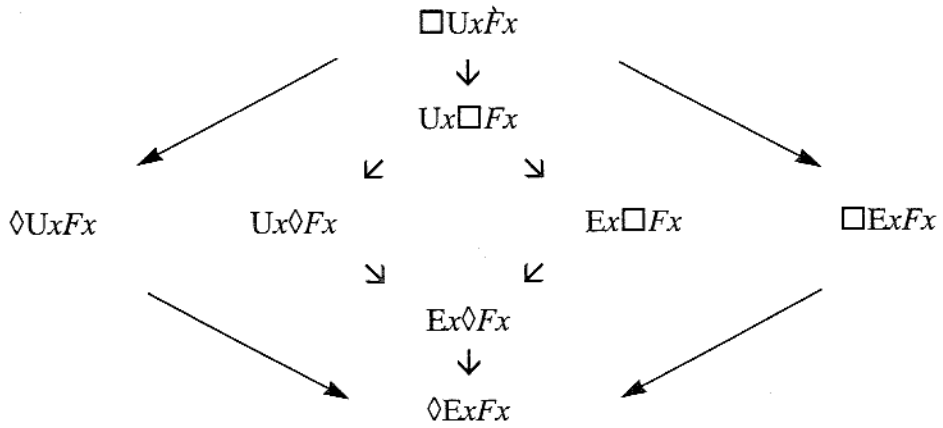
están en al menos un mundo meramente posible), y niega que los objetos tengan propiedades en los mundos en que no están. Se admite la definición del mundo posible (13.4.4) como una situación maximal y consistente.[135] También puede usarse en este contexto la doctrina de las esencias individuales (13.4.2).

Se ha considerado que el sistema que mejor refleja esta concepción actualista de los mundos posibles es S5 con un sistema de cuantificación que permite sólo dos contactos entre los anillos exterior e interior: las implicaciones contrabarcaneanas:

$\Box \mathrm{U}xFx > \mathrm{U}x\Box Fx$

$\mathrm{E}x\,\Diamond Fx > \Diamond \mathrm{E}xFx$[136]

De manera que el sistema actualista difiere del de Kripke al admitir las implicaciones contabarcaneanas, pero coincide con él al rechazar las de Barcan y Buridano. Las relaciones, pues, aparecen de la siguiente manera:



Esta estructura se asegura imponiendo restricciones a las reglas **in** y **ep,** expresables informalmente así:

1. para **in**: *si hay una variable libre en la subprueba estricta, ésta también tiene que aparecer en* A *como libre (si* A *se sigue del paso o de los pasos donde era libre).*

|□ |		— si una variable es libre
| *A*	**in**	— también es libre aquí

Uso correcto:

|□ |		
| | *Fx*		— *x* es libre
| □*Fx*	**in**	— *x* es libre

[135] Una situación inconsistente, p. ej. 2 + 2 = 5 (*C*) tanto implica como excluye toda situación (~□*C* > [*C* → *p*] y ~□*C* > ~◊[*C* & *p*] respectivamente).

[136] El sistema de Thomas L. Jager ("An Actualistic Semantics for Quantified Modal Logic", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. 23, núm. 3 (julio 1982), pp. 335-349; ver Plantinga, "Actualism and Possible Worlds", *Theoria*, tomo 42, 1976, pp. 139-160.

Violaciones:

□ |		
| Fx		— x es libre
□ExFx	**in**	— x no es libre (VIOLACIÓN)

□ | Fx & Gy		— y es libre
| Fx		
□Fx	**in**	— y no aparece (VIOLACIÓN)

2. para **ep**: *si* A *contiene una variable libre, tiene que serlo también en la hipótesis* B *de la subprueba.*

□ | B		— la variable es libre
◊A	**ep**	— si es libre aquí

Uso correcto:

□ | Fx		
| ExFx		
◊ExFx	**ep**	—no contiene variable libre

□ | Fx & Gx		— x es libre
| Fx		
◊Fx	**ep**	— x es libre

Violación:

□ | UxFx		— x no es libre
| Fx		
◊Fx	**ep**	— x es libre (VIOLACIÓN)

En las pruebas de las implicaciones barcaneanas, la regla **in** viola la restricción; p. ej., (4.7):

1												$\mathrm{U}x\Box Fx$
2												$\Diamond\mathrm{U}x\Box Fx$
3	$\Box$	x	c									$\sim Fx$
4												$\Diamond\sim Fx$
5												$\sim\Box Fx$
6								$\Box$	c			$\mathrm{U}x\Box Fx$
7												$\Box Fx$
8												$\sim\Box Fx$
9												$\sim\mathrm{U}x\Box Fx$
10												$\Box\sim\mathrm{U}x\Box Fx$
11												$\sim\Diamond\mathrm{U}x\Box Fx$
12												$\Diamond\mathrm{U}x\Box Fx$
13												Fx — x es libre
14												$\mathrm{U}xFx$
15												$\Box\mathrm{U}xFx$ **in** — x no es libre

Puede verse en la siguiente comparación por qué no valen las de Buridano y sí las contrabarcaneanas (las pruebas de las otras implicaciones no emplean ni **in** ni **ep**); estas pruebas deben compararse con las demostraciones en 12.2.3.

1					$\Box\mathrm{U}xFx$
2	x	$\Box$			$\mathrm{U}xFx$
3					Fx
4					$\Box Fx$ **in** (uso correcto)
5					$\mathrm{U}x\Box Fx$

1					$\Diamond\mathrm{U}xFx$
2	x	$\Box$			$\mathrm{U}xFx$
3					Fx
4					$\Diamond Fx$ **ep** VIOLACIÓN
5					$\mathrm{U}x\Diamond Fx$

1					$\mathrm{E}x\Box Fx$
2	x				$\Box Fx$
3		$\Box$			Fx
4					$\mathrm{E}xFx$
5					$\Box\mathrm{E}xFx$ **in** VIOLACIÓN
6					$\Box\mathrm{E}xFx$

1	$\mathrm{E}x\Diamond Fx$	
2	$x \mid \Diamond Fx$	
3	$\Box \mid Fx$	
4	$\mathrm{E}xFx$	
5	$\Diamond\mathrm{E}xFx$	**ep** (uso correcto)
6	$\Diamond\mathrm{E}xFx$	

Es interesante que si se acepta la siguiente interpretación cuantificacional de estas pruebas (10.4), las mismas restricciones se aplicarían de la siguiente manera (las expresiones "sensibles" están subrayadas; note el paralelismo entre **in** e **icu** y entre **ep** y **ece**):

1	$\mathrm{U}z[Mz > \mathrm{V}^z\mathrm{U}xFx]$	
2	$x \mid z \mid Mz$	
3	$Mz > \mathrm{V}^z UxFx$	
4	$\mathrm{V}^z\mathrm{U}xFx$	
5	$\mathrm{V}^z \mid \mathrm{U}xFx$	
6	$\mid Fx$	
7	$\mathrm{V}^z Fx$	
8	$Mz > \mathrm{V}^z Fx$	
9	$\mathrm{U}z[Mz > \mathrm{V}^z Fx]$	**icu** (uso correcto)
10	$\mathrm{U}x\mathrm{U}z[Mz > \mathrm{V}^z Fx]$	

1	$\mathrm{E}z[Mz \,\&\, \mathrm{V}^z\mathrm{U}xFx]$	
2	$z \mid \mathrm{E}z[Mz \,\&\, \mathrm{V}^z\mathrm{U}xFx]$	
	$z \mid Mz \,\&\, \mathrm{V}^z\mathrm{U}xFx$	
3	Mz	
4	$\mathrm{V}^z\mathrm{U}xFx$	
5	$\mathrm{V}^z \mid \mathrm{U}xFx$	
6	$\mid Fx$	
7	$\mathrm{V}^z Fx$	
8	$Mz \,\&\, \mathrm{V}^z Fx$	
9	$\mathrm{E}z[Mz \,\&\, \mathrm{V}^z Fx]$	
10	$\mathrm{E}z[Mz \,\&\, \mathrm{V}^z Fx]$	**ece** VIOLACIÓN
11	$\mathrm{U}x\mathrm{E}z[Mz \,\&\, \mathrm{V}^z Fx]$	

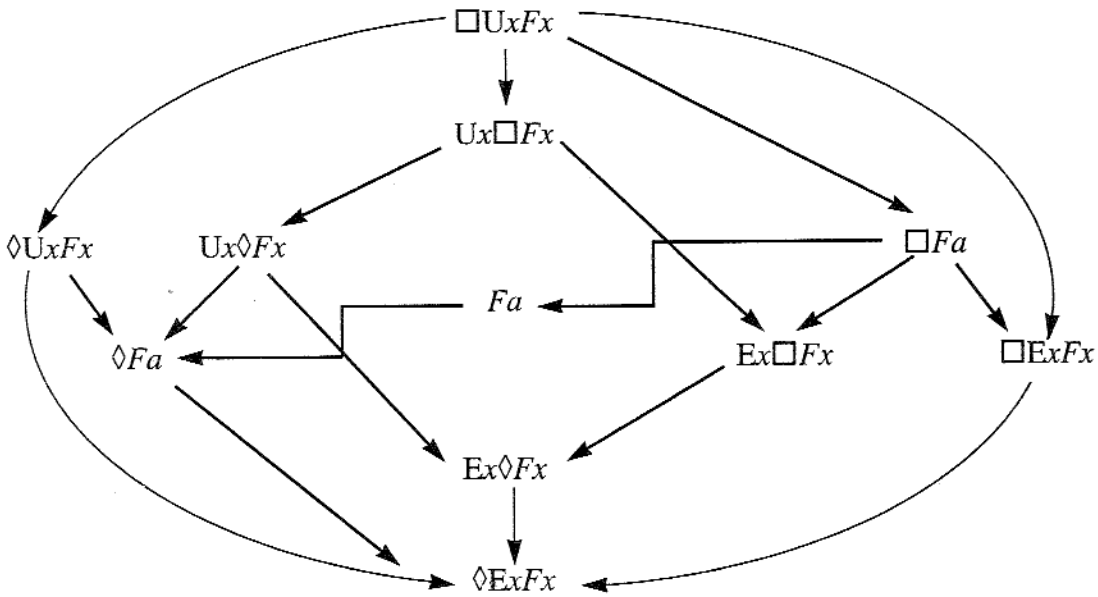
1	$\mathrm{E}x\mathrm{U}z[Mz > \mathrm{V}^z Fx]$	
2	$z \mid Mz$	
3	$\mathrm{E}x\mathrm{U}z[Mz > \mathrm{V}^z Fx]$	
4	$x \mid \mathrm{U}z[Mz > \mathrm{V}^z Fx]$	
5	Mz	
6	$Mz > \mathrm{V}^z Fx$	
7	$\mathrm{V}^z Fx$	
8	$\mathrm{V}^z \mid Fx$	
9	$\mid \mathrm{E}xFx$	
10	$\mathrm{V}^z\mathrm{E}xFx$	
11	$\mathrm{V}^z\mathrm{E}xFx$	
12	$Mz > \mathrm{V}^z\mathrm{E}xFx$	
13	$\mathrm{U}z[Mz > \mathrm{V}^z\mathrm{E}xFx]$	**icu** VIOLACIÓN

1			$\mathrm{E}x\mathrm{E}z[Mz \,\&\, \mathrm{V}^{z}Fx]$	
2	x		$\mathrm{E}z[Mz \,\&\, \mathrm{V}^{z}Fx]$	
3		z	$Mz \,\&\, \mathrm{V}^{z}Fx$	
4			Mz	
5			$\mathrm{V}^{z}Fx$	
6			V^{z} Fx	
7			$\mathrm{E}xFx$	
8			$\mathrm{V}^{z}\mathrm{E}xFx$	
9			$Mz \,\&\, \mathrm{V}^{z}\mathrm{E}xFx$	
10			$\mathrm{U}z[Mz \,\&\, \mathrm{V}^{z}\mathrm{E}xFx]$	
11			$\mathrm{U}z[Mz \,\&\, \mathrm{V}^{z}\mathrm{E}xFx]$	**ece** (uso correcto)
12			$\mathrm{U}z[Mz \,\&\, \mathrm{V}^{z}\mathrm{E}xFx]$	

13.5 Asequibilidad

Kripke y otros lógicos han empleado la relación de la *asequibilidad* o accesibilidad para entender la estructura e interrelación de los sistemas T, S4 y S5 y explicar su conexión con los mundos posibles. Veremos que S5 es el sistema más sencillo en este sentido porque exhibe una asequibilidad incondicional.

Cuando agregamos tres proposiciones con constantes terminales a las proposiciones cuantificadas, parecen valer todas las siguientes implicaciones con flechas:



Se permiten en este esquema completo no sólo todas las implicaciones cuantificadas actualistas, sino también: $\Box\mathrm{U}xFx > \Box Fa$, $\Box Fa > Fa$, $Fa > \Diamond Fa$,y $\Diamond Fa > \Diamond\mathrm{E}xFx$.Sin embargo, si asumimos que los mun-

dos posibles no tienen que tener los mismos objetos, y hay que excluir las fórmulas $\Diamond Fa > Ex\Diamond Fx$ y $Ux\Box Fx > \Box Fa$ (p. ej., en cuanto a la primera, de la premisa que tienen la propiedad de ser loco, no se sigue que resida en un mundo específico –como el real– donde puede ser loco).

13.5.1 Las relaciones

La relación de la asequibilidad puede explicarse con la metáfora de "ver" o "concebir" lo que pasa en un mundo posible. Si el mundo m_2 es asequible a m_1, entonces lo que pasa en m_2 es visible para o concebible por una persona en m_1, o sea que un observador en m_1 puede ver lo que pasa en m_2. Note que los términos están al revés:

m_1 ve (concibe) lo que pasa en m_2

m_2 es asequible a m_1

Los sistemas T, S4 y S5 se diferencian según los tipos de relación de la asequibilidad que permiten. En T no es sino reflexiva, en S4 también transitiva, y en S5 es reflexiva, transitiva, y simétrica (2.2.9):

	reflexiva	*transitiva*	*simétrica*
T	x		
S4	x	x	
S5	x	x	x

Cuando se dice que la relación es reflexiva en este contexto, se quiere decir que el mundo es asequible a sí mismo. Por lo tanto, en los tres sistemas el observador Fulano ve lo que ocurre en su propio mundo. Si Fulano está en m_1 (asequible a sí mismo) y es cierto en m_1 que don Quijote ama a Dulcinea (Q), entonces Fulano ve "dentro" de su propio mundo que Q. Y también puede concluir que es posible en su mundo m_1 que don Quijote ame a Dulcinea ($Q > \Diamond Q$, por **ip**).

Supongamos que m_2 y m_3 son asequibles a m_1. En este caso, además de haber tres relaciones reflexivas de la asequibilidad (tanto m_1 como m_2 y m_3 son "autoasequibles"), también hay dos relaciones no-reflexivas de la asequibilidad: de m_2 a m_1 y de m_3 a m_1). Note que "no-reflexiva" significa que los mundos no tienen que ser asequibles sólo a sí mismos (la relación sería "irreflexiva" si ningún mundo fuera autoasequible). Por lo tanto, Fulano en m_1 ve "adelante" lo que pasa en m_2 y m_3. Digamos que Q es V en m_2 pero no en m_1; Fulano ve que Q es V en m_2 y puede afirmar que Q es posible ($\Diamond Q$) en su propio mundo m_1. En los siguientes diagramas, la flechas significan "ve lo que pasa en" (la relación conversa de la asequibilidad) y "$\angle$" indica que el mundo ve lo que pasa en sí mismo (reflexividad):

$\angle m_2$

$\angle m_1$
Fulano

$\angle m_3$

Tal es la situación del sistema T: Fulano en m_1 ve lo que pasa en los mundos que le son asequibles, los cuales son:

1) su propio mundo m_1 (por una relación reflexiva de la asequibilidad)
2) los otros mundos m_2 y m_3 (por dos relaciones no-reflexivas de la asequibilidad)

Cambiemos ahora el ejemplo y digamos que Fulano está en m_1 y Mengano en m_2; agreguemos que m_2 es asequible a Fulano en m_1 y m_3 es asequible a Mengano en m_2.

$\angle m_1$ → $\angle m_2$ → $\angle m_3$
Fulano Mengano

Si la relación de la asequibilidad es transitiva, entonces Fulano ve lo que pasa en m_2 y también en m_3 (y, claro, en m_1 por la relación reflexiva). O sea que Fulano ve lo que pasa en m_3 "a través" de m_2. Mengano ve su propio mundo (por la relación reflexiva) y ve adelante lo que pasa en m_3, pues en el ejemplo sólo m_3 y m_2 mismo le son asequibles en m_2, pero no ve la situación en m_1. Fulano ve a Mengano, pues, pero éste no ve a aquél, porque Mengano sólo puede ver dentro m_2 y adelante: m_3 (m_1 no le es asequible). Tal es la situación de S4:

1) Fulano en m_1 ve lo que pasa en m_1 (reflexividad), m_2 (no-reflexividad) y m_3 (transitividad)
2) Mengano en m_2 ve lo que pasa en m_2 (reflexividad) y m_3 (no-reflexividad)

La transitividad significa, pues, que si m_2 es asequible a m_1 y m_3 es asequible a m_2, entonces m_3 es asequible a m_1.

Ahora bien, si la relación de la asequibilidad también es simétrica, Mengano ve no sólo dentro y adelante sin también "atrás": ve dentro (m_2), adelante (m_3) y atrás (m_1). Digamos que Zutano es un habitante de m_3:

$\angle m_1$ ↔ $\angle m_2$ ↔ $\angle m_3$
Fulano Mengano Zutano

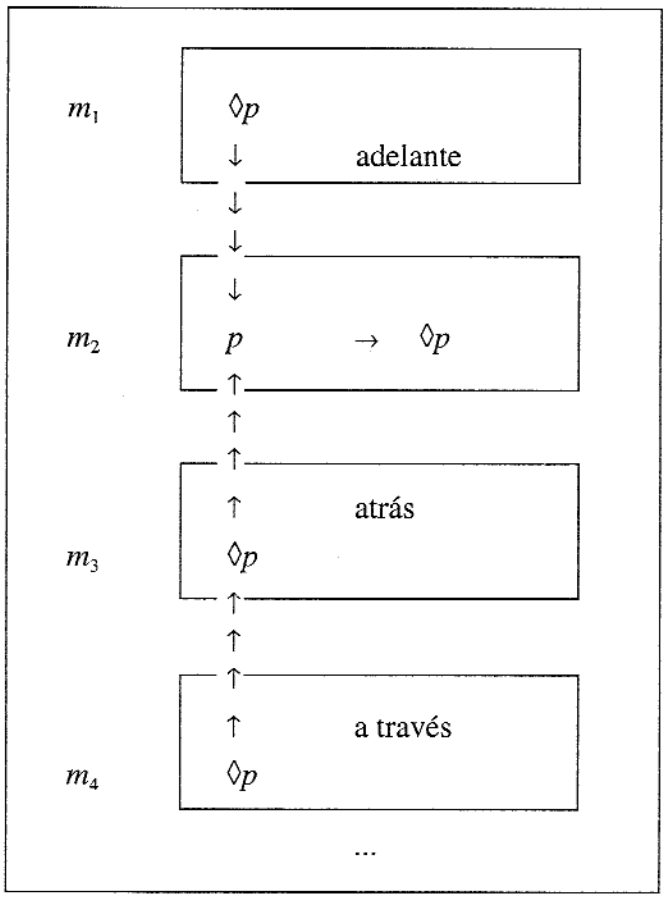
Tal es la situación de S5:

Fulano, Mengano y Zutano ven lo que pasa en todos los mundos posibles.

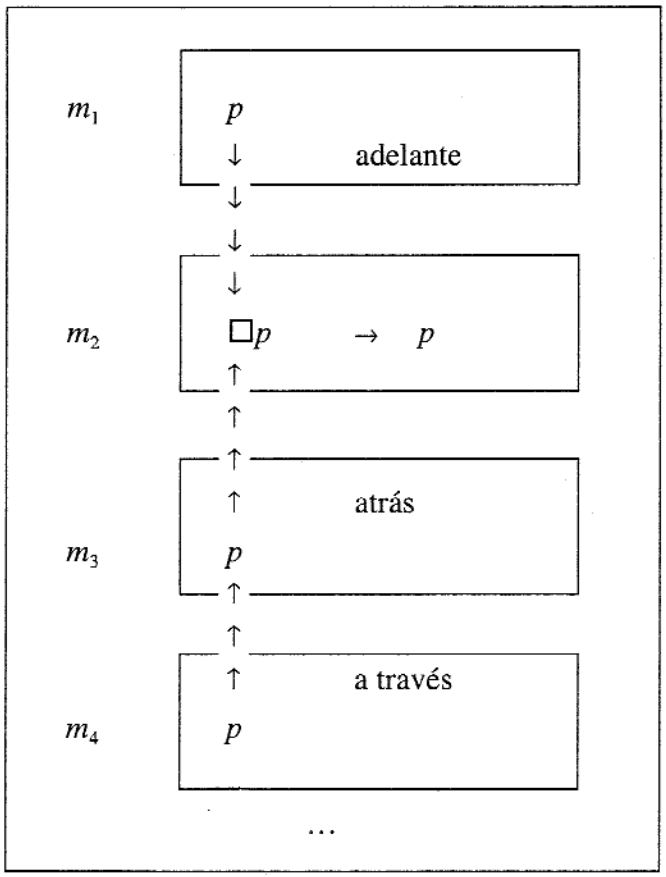
13.5.2 Asequibilidad en S5

Veamos los tres casos más de cerca, usando otro diagrama de los mundos posibles. Comenzamos con S5 porque es más sencillo.

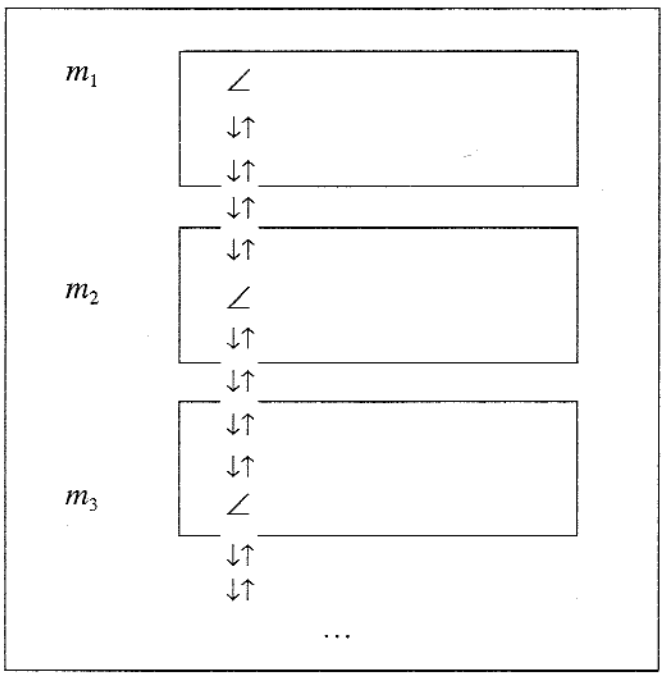
Primero mostramos por qué vale la necesidad de la posibilidad (A4': $\Diamond p > \Box\Diamond p$), una de las implicaciones típicas de S5. Si $\Diamond p$ es V, entonces p es V en al menos un mundo, digamos en m_2. Entonces es V en m_2 que $\Diamond p$ ($p > \Diamond p$) por la asequibilidad reflexiva. Y porque m_1 ve adelante lo que pasa en m_2, $\Diamond p$ también es V en m_1, pues en el ejemplo la asequibilidad no es sólo reflexiva. Y porque m_3 ve atrás lo que pasa en m_2, por la simetría (ve adelante y atrás), $\Diamond p$ es V en m_3. Además, porque m_4 ve lo que pasa en m_3, también, debido a la transitividad, ve lo que pasa en m_2 a través de m_3, y por lo tanto $\Diamond p$ es V en m_4. O sea que en *todo* mundo se ve que p es V en m_2, y por ende $\Diamond p$ es V en todo mundo, e. d., $\Diamond p$ es necesario ($\Diamond p > \Box\Diamond p$). Es por ello que en S5, $\Diamond p$ es iterable en una subprueba estricta. Claro que no podemos quitar el operador $\Diamond$ de $\Diamond p$ al iterarlo, porque no es p, sino $\Diamond p$ lo que es V en todo mundo.



Es evidente también por qué vale A3', la segunda implicación típica de S5 ($\Diamond\Box p > \Box p$). Si $\Diamond\Box p$ es V, entonces $\Box p$ es V en al menos un mundo posible, digamos en m_2. Alguien en m_1 ve adelante que $\Box p$ es V en m_2 y por ende sabe que p es V en su propio mundo, m_1 ($\Box p > p$). Y alguien en m_3 ve atrás y sabe que p es V en su propio mundo, m_3, y porque un habitante de m_4 puede ver a través de m_3 que $\Box p$ es V en m_2, p es V también en m_4. El resultado es que p es V en *todo* mundo posible, o sea que p es necesario ($\Box p$).



En los diagramas de arriba, sólo las flechas comentadas están indicadas. Si completamos las relaciones aparecería así (∠ indica la relación reflexiva):



13.5.3 Asequibilidad en T y S4

Los casos de T y S4 son más complejos, porque no se toma en cuenta *todo* mundo posible. Como dijimos, un observador en T ve lo que pasa en el mundo donde está y en los que le son asequibles, pero no en los asequibles sólo a éstos mismos. En S4 también ve lo que pasa en los mundos asequibles a los que son asequibles al original, pero la vista no es recíproca, pues los mundos no son mutuamente asequibles.

Respecto al sistema T, digamos que p es necesario ($\Box p$). Entonces si el observador está en m_1, p es V en todo mundo posible asequible a m_1. Esto es lo que significa la restricción de quitar el operador modal de $\Box p$ (y $\sim\Diamond p$) cuando se itera en la subprueba (12.1); e. d., la subprueba incluye todo mundo asequible a m_1:

1	$\Box p$	**h**
2	$\Box$ p	1 **i** (T)
	...	
	...	

La proposición p es necesaria en todo mundo desde la perspectiva de m_1, sin que se sepa desde éste lo que ocurre en los mundos que no le son asequibles, porque en T la asequibilidad no es transitiva.

En cambio en S4, cuando $\Box p$ es V en m_1, se sabe en m_1 que p es V no sólo en los mundos que le están asequibles a m_1, sino también en los asequibles a éstos, por ser la asequibilidad transitiva. Este rasgo se refleja en la posibilidad de iterar $\Box p$ con el operador $\Box$:

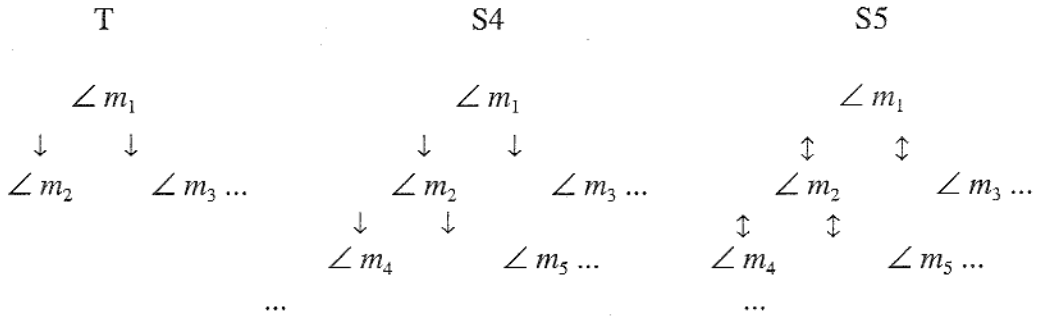
1	$\Box p$	**h**
2	$\Box$ $\Box p$	1 **i** (S4)
3	$\Box$ $\Box p$	2 **i** (S4)
	...	
	...	
	...	

Es evidente por qué las implicaciones típicas de S4, A1' y A2', pueden demostrarse en S4. En el caso de A2', $\Diamond\Diamond p > \Diamond p$, una paráfrasis de la prueba dada arriba (12.3) es lo siguiente. Comenzamos aceptando que $\Diamond p$ es V en al menos un mundo ($\Diamond\Diamond p$), digamos en m_1. Pero hagamos el supuesto de que $\Diamond p$ no es V ($\sim\Diamond p$) en algún mundo, digamos en m_2 (el supuesto corresponde a la hipótesis de la subprueba que niega el paso introducido por **ing**). En este caso, $\sim\Diamond p$ (y su forma equivalente $\Box\sim p$) sería V en todo mundo ($\sim\Diamond p > \Box\sim\Diamond p$, válido porque, en S4, $\sim\Diamond p$ es iterable en una subprueba estricta) y por ende inclusive en m_1. Aparece, pues, una contradicción en al menos un mundo posible, m_1: $\Diamond p$ y $\sim\Diamond p$. Por lo tanto, tenemos que negar el supuesto (negar $\sim\Diamond p$), lo que equivale a afirmar $\Diamond p$, la proposición que queríamos demostrar bajo la condición $\Diamond\Diamond p$.

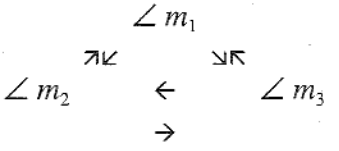
En cambio, como vimos, en S4 no se puede considerar $\Diamond p$ como V en todo mundo posible, porque si bien p es V en alguno, en los otros no se ve esto y por ende no se puede afirmar $\Diamond p$; con otras palabras,

la relación entre los mundos no es mutua o simétrica en S4. S5, pues no tiene la complicación de los "puntos de vista", y la relación entre los mundos es tanto simétrica como transitiva y reflexiva.

Podemos usar esta ilustración de la asequibilidad:



Las relaciones de S5 también pueden imaginarse de la siguiente manera, suponiéndose la existencia de tres mundos:



13.6 Mundos no aléticos

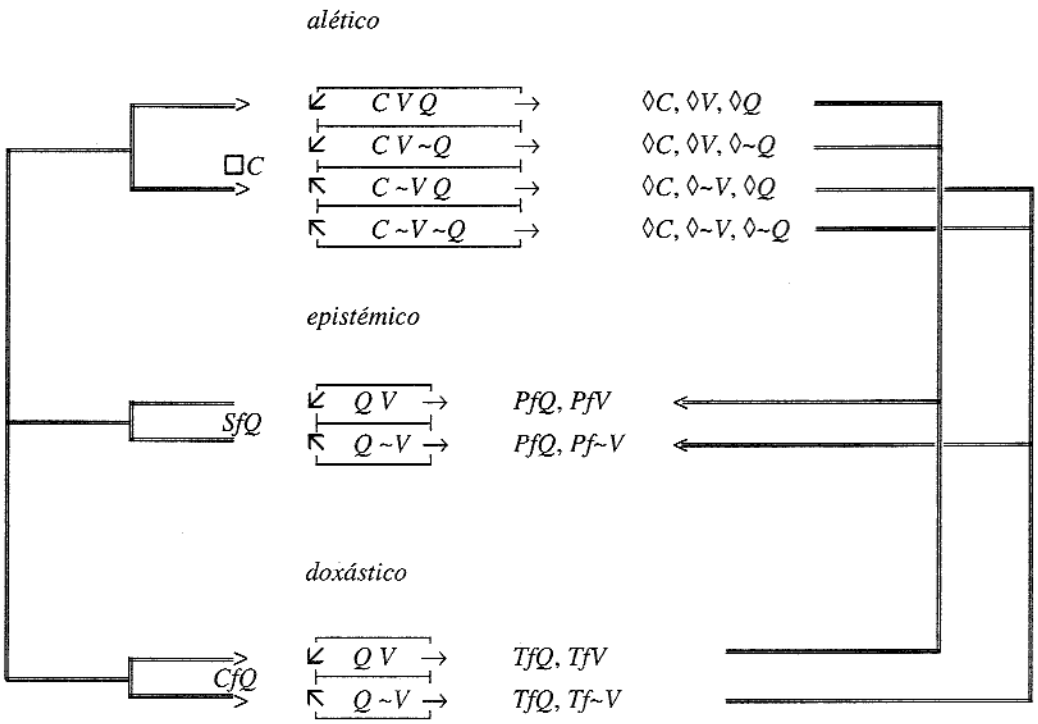
Hemos observado (10.3.2) que el sentido de los mundos variará según la interpretación que se atribuya a los operadores. Comentamos ahora la semántica de los sistemas no aléticos. Iniciamos mostrando el cosmograma formal, sin interpretación fuera de lo formal, en el caso de tres proposiciones:

formal

p	q	r
p	q	$\sim r$
p	$\sim q$	r
p	$\sim q$	$\sim r$

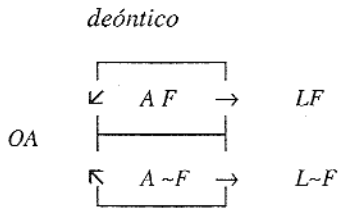
La proposición p es gobernada por un operador fuerte y tanto q como r son gobernados por operadores débiles.

Veamos el caso de la lógica alética, epistémica y doxástica, las cuales podemos considerar juntas. En ellas valen las mismas reglas, con la salvedad de que la alética y la epistémica incluyen los vínculos con la verdad que faltan en la doxástica. En la siguiente ilustración, las flechas de astil doble representan cómo un mundo (o mundos) entrañan otro(s); la bifurcación "$\dashv\!\!\|$" indica la conjunción. Hablamos de tres proposiciones: "2 + 2 = 4" (*C*), "Cervantes escribó *Don Quijote*" (*Q*) y "Hay vida en otras partes del universo" (*V*).

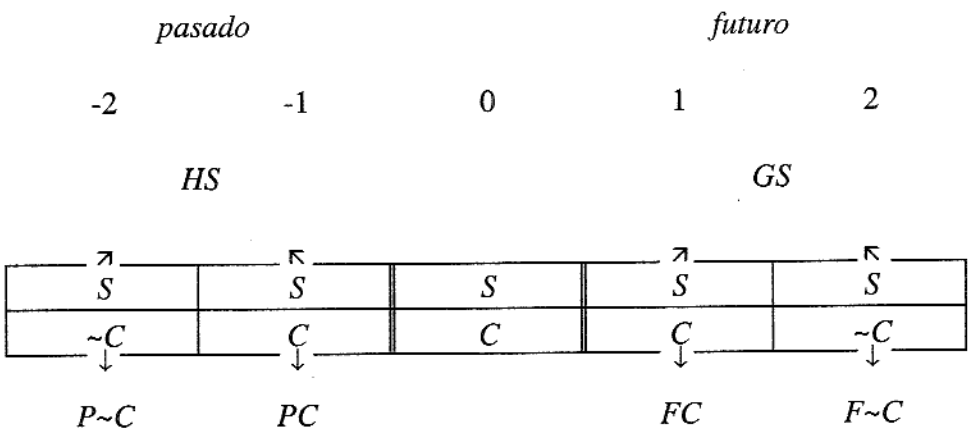


El cosmograma alético representa lo "real" en el sentido amplio (8.3.1). Los otros dos son objeto del sistema de creencias de la persona pensante, Fulano. El cosmograma epistémico representa lo posible relativo a lo que Fulano sabe y el cosmograma doxástico representa lo posible relativo a lo que Fulano cree.

Es más sencillo presentar un cosmograma deóntico porque no está vinculado con otros cosmogramas. Usamos los ejemplos de "ayudar a los necesitados" (*A*) e "ir a un partido de futbol" (*F*). El cosmograma representa lo lícito moral.



En la lógica del tiempo, se combinan dos sistemas, los que atañen a lo pasado y a lo futuro, y los mundos, pues, representarán estos tiempos. "Acostamos" los cosmogramas temporales conforme a los diagramas anteriores. Usamos los ejemplos: "hay partículas subatómicas" (*S*) y "hay cóndores californianos" (C, suponiéndose que se extinguirán en el futuro). Los cosmogramas representan el pasado y el futuro (con el presente "en medio").


pasado
futuro
-2
-1
0
1
2
HS
GS
S
S
S
S
S
~C
C
C
C
~C
P~C
PC
FC
F~C

Capítulo 14

MUNDOS Y FILOSOFÍA

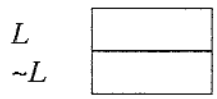
Una gran parte de los comentarios hechos hasta ahora han tenido que ver con la ontología. Aquí mencionamos unos puntos en que las lógicas modales y la semántica de los mundos posibles tocan otras áreas de la filosofía.

14.1 Filosofía de la ciencia

Consideramos unos ejemplos conocidos de las muchas aplicaciones de la lógica en la filosofía de la ciencia.

14.1.1 Las leyes naturales

La distinción medieval entre la necesidad lógica y nómica o física constituyó una aclaración importante en el desenvolvimiento de la teoría modal (9.2.3): las constancias observadas en la naturaleza no son lógicamente necesarias. Las leyes naturales del mundo real son contingentes; e. d., hay al menos un mundo en el que falla al menos una ley natural (14.5.2). Decimos, pues, donde L hace las veces de la conjunción de todas las leyes naturales: ∇L ($=_{df}$ $\Diamond L$ & $\Diamond{\sim}L$). El siguiente cosmograma representa la contingencia de la legalidad física:



Se ha interpretado la necesidad física como el ser entrañado por las leyes naturales: una proposición p es físicamente necesaria ssi es implicada estrictamente por las leyes naturales:

$L \rightarrow p$ (abreviatura de $\Box[L > p]$)[137]

[137] Por ejemplo, F. B. Fitch, pp. 69 y 76.

Un ejemplo sería: cualesquiera dos cuerpos se atraen mutuamente con una fuerza proporcional a su masa. Por otro lado, la posibilidad física sería la consistencia con las leyes naturales; p es físicamente posible ssi es consistente con L. La proposición p es naturalmente posible, pues, ssi es posible la conjunción de p con las leyes naturales:

$L \circ p$ (abreviatura de $\Diamond[L \,\&\, p]$)

La contingencia física sería, por supuesto, la conjunción de la posibilidad de su afirmación con la de su negación. La proposición p es física o naturalmente contingente ssi tanto p como $\sim p$ son físicamente posibles, o sea:

$[L \circ p] \,\&\, [L \circ \sim p]$ (abreviatura de $\Diamond[L \,\&\, p] \,\&\, \Diamond[L \,\&\, \sim p]$)

14.1.2 Falibilismo

Según la conocida tesis del falibilismo, asociado con C. S. Peirce, las hipótesis científicas pueden ser refutadas, pero no demostradas lógicamente. Una hipótesis puede confirmarse por medio del *modus ponens falso* (1.5.2). Digamos que si la hipótesis H es V, entonces cierto resultado R será el caso (típicamente el resultado se comprueba de manera experimental). Si el resultado se verifica, se dice que la hipótesis "se confirma", pero es evidente que no se demuestra lógicamente:

NO	1	$H > R$	**h**
	2	R	**h**
		H	— *modus ponens F*

En cambio, una hipótesis puede rechazarse lógicamente, pues si el resultado falla, la hipótesis es F:

1	$H > R$	**h**
2	$\sim R$	**h**
3	$\sim H$	1, 2 **mt**

Note, sin embargo, que este procedimiento no muestra que la hipótesis sea F lógicamente, o imposible ($\sim\Diamond p$), pues se entiende sólo de los mundos en que valen las leyes físicas del mundo real. La ciencia, pues, es infinitamente revisable.

14.1.3 Oraciones disposicionales

Se ha debatido la índole de las propiedades "disposicionales" que aparecen frecuentemente en el discurso científico, como "soluble en el agua". "El azucar es soluble en el agua" se interpreta como "si se mete el azúcar en el agua, ésta se disolverá". El problema es que si se formaliza como $A > D$ ("se disolverá el azúcar si se mete en el agua"), existe el inconveniente de que la implicación vale si *no* se mete el azúcar en el agua:

1	$\sim C$	**h**
2	$\quad C$	**h**
3	$\quad \sim C$	1 **i**
4	$\quad D$	2, 3 **eng**
5	$C > D$	2-4 **ii**

Hay que recurrir, se ha insistido, a la noción de la posibilidad para bloquear este resultado. Se trata, pues, de las paradojas de la implicación (9.4.1). También se menciona la lógica de la relevancia (1.4.4.4, 4.1.6) en el contexto de los contrafácticos ("si fuere el caso que *p*, entonces sería el caso que *q*"), en los que el "entrañamiento" parece incluir más que la implicación material o estricta.

14.1.4 Lógica y ciencia

Según la concepción sistematista, la ciencia no es un cúmulo de contenidos sueltos, sino que tiene estructura. Explicamos brevemente la versión de la teoría de A. Rubio (8.2.3).[138] Idealmente la ciencia es un sistema axiomático: una red de inferencias que descansan finalmente en "principios". La lógica, pues, forma parte de la fábrica de la ciencia, y el científico también es lógico.

La ciencia es general, dice Rubio; la biología, digamos, estudia principalmente no este organismo particular sino el organismo como tal. La ciencia es necesaria en el sentido de que intenta identificar las "propiedades necesarias" (*passiones*) de lo que estudia: las "esenciales", que no pueden sino convenir al objeto.

El científico usa la lógica de dos maneras complementarias. De un acervo de términos técnicos forma oraciones, une éstas en inferencias y las dispone en un sistema cuya necesidad descansa en la de las inferencias demostrativas. Tal es su tarea lógica "práctica" o "constructiva" (*compositoria*). Su tarea "teórica" o "analítica" (*resolutoria*) es trazar las líneas inferenciales hasta los axiomas y analizar las oraciones en sus términos constituyentes. La necesidad de la ciencia es la de la lógica que contiene.

La lógica misma es una ciencia y por ende un sistema axiomático constando a su vez de términos, oraciones, inferencias y estructura necesaria (note el paralelismo con la lógica predicativa, proposicional

[138] *Lógica mexicana, cuestiones proemiales*; W. Redmond, "Science, Logic and Necessity in the *Logica Mexicana*", *Modality in the Schools: Studies in the Theory of Modality in Second Scholasticism (1500-1750)*, ed. Jeffrey Coombs y Gino Roncaglia, Kluwer, de próxima aparición; "Lógica y ciencia en la 'Lógica mexicana' de Rubio", *Quipo/ Revista latinoamericana de historia de las ciencias y la tecnología*, vol.1, núm. 1, pp. 55-82; "Colonial Thought in Latin America", *Routledge Encyclopedia of Philosophy*, de próxima aparición.

y modal). Pero la lógica es única porque carece de un objeto propio en el sentido de que enfoca cierto aspecto de todo lo que las otras ciencias estudian (hoy usamos variables para desatender lo que no es de interés lógico). Este aspecto especial que la lógica identifica en el discurso científico —las "*passiones*" de la lógica— es cierto conjunto de relaciones: aquellas que se dan entre los términos de una oración, entre las oraciones de un argumento y entre las inferencias del sistema.

Por ejemplo, el científico dice: "el organismo tiene ADN" y el lógico dice "el organismo es un sujeto". Pero el tener-ADN y el ser-sujeto son distintos tipos de propiedades. El tener-ADN, la propiedad científica, es real porque conviene a los organismos particulares en el mundo. Pero la propiedad lógica de ser-sujeto sólo conviene a las "cosas", en este caso conviene a la propiedad de ser organismo en su "ser-de-conocido" (*esse cogniti*). Las propiedades lógicas son "segundas intensiones" (1.2.1), "construcciones mentales (*entia rationis*)", no en el sentido de que sean ficticias, sino porque no convienen "realmente" a los objetos mencionados; p. ej., el ser-sujeto no conviene al organismo concreto.

La teoría de la lógica de Rubio, pues, puede formularse en la proposición:

$$\mathbb{R}xy$$

donde $\mathbb{R}$ sustituye a términos para cualesquiera relaciones lógicas de nivel superior, y las variables x y y sustituyen a términos para las propiedades (en el sentido general) de nivel inferior estudiadas en las otras ciencias, las cuales convienen a su vez a las cosas concretas.

14.2 Literatura

Uno de los usos más frecuentes de la semántica de los mundos posibles fuera de la filosofía es en la literatura, donde ha demostrado su utilidad en el análisis del trasfondo ontológico de la ficción. ¿En qué sentido es F que Sherlock Holmes sea francés y V que es inglés? Que sea francés es F tanto en el mundo posible donde vive el detective como en el real, donde nunca ha existido. Que es inglés es V en el mundo que creó Sir A. Conan Doyle y F en el mundo real.

En *Cien años de soledad*, Fernanda dice: "Remedios la bella se llevó las sábanas". Es F en el mundo real pero V en el mundo que constituye los antecedentes ontológicos que García Márquez creó para la novela. Es posible, pues, y por ende su posibilidad es V en el mundo real ($\Diamond p$ es V en el mundo real).

"Remedios la bella se elevó en los altos aires" es V en el mundo de *Cien años*, y sabemos, por lo tanto, que este mundo pertenece al conjunto de los mundos posibles en que no están vigentes nuestras leyes naturales, puesto que tal ascensión es incompatible con ellas. Los contextos ontológicos de la fantasía científica a veces están en el conjunto de mundos en que nuestras leyes tienen vigor y a veces no.

El argumento de una novela puede presuponer inclusive una imposibilidad lógica; p. ej., si es lógicamente imposible volver al pasado, los personajes de las películas que lo logran no habitan ningún mundo posible. En la lógica escolástica y actual se hablaba de "universos paralelos" en el sentido de historias sincrónicamente posibles e historias temporales (8.4.1, 14.5.2).

14.3 Epistemología

Hay un vínculo estrecho entre la lógica epistémica y la epistemología, y las inferencias en el contexto del saber y del creer han sido discutidas en la historia de la filsofía (9.2.4). Aquí tocamos unos temas relacionados con nuestra presentación.

14.3.1 Uso de la lógica epistémica

La lógica epistémica es importante en la argumentación filosófica porque con su ayuda pueden *matizarse* los argumentos relativizándolos a las actitudes epistémicas del filósofo. Esta lógica da cuenta de que los estados mentales son más complejos que un simple "sí" o "no" sin cuestionar otras tesis filosóficas, como el principio de la bivalencia.

Tomemos el caso de un argumento sencillo propuesto por G. Mavrodes; él está inclinado a aceptarlo, dice, pero no espera que otros lo acepten (*E*: existe algo; *D*: Dios existe):

1	$\sim E \vee D$	**h**
2	E	**h**
3	D	1, 2 **sd**[139]

Una persona podría suponer la siguiente atenuación epistémica del mismo argumento:

1	$Cf[\sim E \vee D]$	**h**
2	SfE	**h**
	...	
	CfD	

pues la primera premisa parece presuponer un gran número de difíciles problemas filosóficos, como el principio de la razón suficiente.

La aceptación epistémica, pues, no tiene que ser un simple "todo o nada". Una expectativa poco realista de lo que se puede "saber" y "entender" puede conducir al chasco. En efecto, la decepción con el optimismo "moderno" del Renacimiento y la Ilustración puede ser un factor en el escepticismo "posmoderno" actual.

[139] *Belief in God*, p. 22.

14.3.2 Omnisciencia lógica

Se ha recalcado frecuentemente que en la lógica epistémica no se trata de precisar un sentido "correcto" de las palabras "saber" y "creer". Y porque hay varias acepciones filosóficas posibles, habrá varios sistemas de la lógica epistémica. Algunos serán más fuertes y otros más débiles. Lo importante es definir exactamente lo que se quiere que haga una lógica epistémica, para entonces escoger las reglas de acuerdo con este deseo y atenerse al sentido a través de la discusión.

Existe un problema en torno a las lógicas epistémicas relativamente fuertes como la de Hintikka. Según su sistema, cuando p implica q lógicamente, si Fulano sabe (o cree) que p, también sabe (o cree) que q. P. ej., si Fulano sabe que Sibelius (s) es finlandés y cree que los finlandeses (F) son escandinavos (E), también sabe que Sibelius es escandinavo:

1	$SfFs$	**h**
2	$CfUx[Fx > Ex]$	**h**
3	$Cf \quad Ux[Fx > Ex]$	2 **i**
4	Fs	1 **i**
5	$Fs > Es$	3 **ecu** m/x
6	Es	4, 5 **mp**
7	$CfEs$	3-6 **is**

Pero no todas las inferencias se intuyen tan fácilmente. Digamos que a Fulano le parece razonable aceptar el sistema modal S5 pero no quiere aceptar el principio fuerte de reducción A3': $\Diamond\Box p > \Box p$. Sin embargo, se puede demostrar (la prueba es algo compleja; (13.3) en S5 que tal inferencia es válida de cualquier proposición. No obstante, parece ridículo decir que cualquier pensador, porque acepta S5, deba creer que la necesidad sigue de su posibilidad. Hemos visto este problema cuando hablábamos de S5 y las fórmulas de Barcan y Buridano y de sus conversas (13.4).

La dificultad es más seria todavía. Evidentemente, no somos conscientes de todas las consecuencias de lo que creemos y sabemos. Sin embargo, según la lógica epistémica que hemos estudiado, debemos —o así parece— saber todas las verdades lógicas, como se puede apreciar en esta prueba:

1	$Sf \quad \sim p > p$	**h**
2	$c \quad \sim p$	**h**
3	$\sim p > p$	1 **i**
4	p	2, 3 **mp**
5	p	2-4 **ing**
6	$[\sim p > p] > p$	1-5 **ii**
7	$Sf \; [\; [\sim p > p] > p]$	1-6 **is**

¡Parece seguirse que Fulano reconoce la validez de la *consequentia mirabilis*!

Los filósofos medievales, como hemos visto, generalmente colocaban a la lógica epistémica en el mundo real. Sin embargo, algunos permitían que se dedujera una proposición *de re* de una *de dicto*: si Fulano sabe el antecedente puede colegirse que sabe el consecuente. Ralph Strode quizás formuló sus inferencias desde la perspectiva del pensador ideal (9.2.4).

Hintikka suponía la "omnisciencia lógica" cuando formuló su lógica epistémica: se trata de los residentes de los mundos posibles más "conocedores" y "consecuentes", donde la gente saca las conclusiones de lo que piensan. La lógica, pues, no representa "las leyes del pensamiento", y estos mundos no son sino un ideal (en algún sentido) para los pensadores reales.

Hintikka también ofreció otro planteamiento. Sugirió que podríamos alterar la interpretación de los conceptos lógicos de inconsistencia, implicación y otros. en el contexto de la lógica epistémica.[140] Una proposición sería "indefendible" más bien que "inconsistente", según su propuesta. Si Fulano dice que $\Diamond p$ es V, pero $\Box\Diamond p$ es F, otra persona le podría mostrar que no puede defender su opinión si acepta la aplicabilidad de S5.

Esta interpretación de "saber" se ha llamado el sentido "responsable" de la palabra (5.3), y análogamente podemos hablar del "creer" responsable. Sin embargo esta acepción de "creer" —y en esto difiere del "saber"— es consistente con la opinión F con tal de que ésta sea contingente. Es decir, Fulano no puede creer que una proposición y su negación sean V ($\sim Cf[p \,\&\, \sim p]$ es teorema de la lógica epistémica de Hintikka), pero puede creer que El Greco fue español de nacimiento ($Cfp \,\&\, \sim p$).

14.3.3 El problema de Moore

Hintikka hizo un comentario interesante del "problema de Moore" con ayuda de su lógica epistémica. Notó que suena raro si Fulano dice "llueve pero no sé que llueve" ($L \,\&\, \sim SfL$); aún más, es *epistémicamente* inconsistente o indefendible para Fulano pronunciar un aserto de la forma "$p \,\&\, \sim Sfp$". Además, es *lógicamente* inconsistente o contradictorio para Fulano decir "*sé que p* es V, pero no sé que *p* es V", "$Sf[p \,\&\, \sim Sfp]$".[141] Presentamos la prueba de que $\sim Sf[p \,\&\, \sim Sfp]$ es un teorema, porque $Sf[p \,\&\, \sim Sfp]$ conduce a una contradicción (5.5). Podemos demostrar que cualquier expresión de la forma $p \,\&\, \sim Sfp$ es epistémicamente inconsistente prefijándole $\sim Sf$ y demostrando el resultado ($\sim Sf[p \,\&\, \sim Sfp]$).

El creer es el contexto del problema de Moore, quien se pregunta por qué suena raro decir "llueve pero no creo que llueva" ($L \,\&\, \sim CfL$). En este caso es *doxásticamente* inconsistente para Fulano decir algo de la forma $p \,\&\, \sim Cfp$. Además, es *lógicamente* inconsistente para Fulano decir "$Cf[L \,\&\, \sim CfL]$" ("*creo* tanto que llueve como que no creo que llueve"). Vimos arriba (5.5.2) que $Cf[p \,\&\, \sim Cfp]$ conduce a una contradicción y por lo tanto hay que afirmar su negación (por **ing**): $\sim Cf[p \,\&\, \sim Cfp]$ (Hintikka sigue el procedimiento en 5.5.3).[142]

La inconsistencia o indefendibilidad epistémica tiene una interesante aplicación en la filosofía de la religión (14.6.1.2).

---

[140] Secciones 2.6-2.10.

[141] Pp. 78-79.

[142] P. 68.

14.3.4 Universalidad de la regla "ei"

Consideramos ahora otro problema de la identidad (3.4.2, 9.2.4, 12.2.4). El hecho de que pueda demostrarse la coimplicación $a = b$ <> UZ[Za <> Zb] en nuestro sistema no demuestra necesariamente que sean "leyes" las dos inferencias que incorpora. Santo Tomás, Leibniz y otros lógicos del pasado y de hoy han opinado que la ley de la indiscernibilidad de la identidad admite excepciones. Veamos un argumento en el contexto epistémico o "intensional". En esta prueba, m y v denotan la estrella matutina y la vespertina y p el planeta Venus:

1	$m = v$	
2	$Sf(m = p)$	
3	$Sf(v = p)$	1, 2 **ei**

La prueba tiene este sentido: si la estrella matutina es idéntica a la vespertina y Fulano sabe que la estrella matutina es idéntica con Venus, entonces sabe que la estrella vespertina es idéntica con Venus. El problema es que las premisas pueden ser V y la conclusión F, pues Fulano podría saber que la estrella matutina es Venus sin saber que la vespertina también lo es, porque, como dijo Frege, la identidad de las estrellas matutina y vespertina fue un descubrimiento astronómico.

Una solución medieval es sencilla y obvia. Se negaba que la sustitutividad de la identidad valiese dentro del alcance de los verbos cognoscitivos y, por ende, se rechazaban tales inferencias como (Cx: "x corre", m: Marcos, t: Tulio —los dos nombres de Cicerón—):

NO	1	$SfCm$	
	2	$m = t$	
	3	$SfCt$	1, 2 **ei**

Pero algunos lógicos permitían la versión *de re* especial de la conclusión: E$x(x = m)$ & $SsFx$: "existe algo que es Marcos que Sócrates sabe que corre" (9.2.4).

La identidad, pues, no puede entrar sin más en un contexto intensional. Para que valga la prueba anterior, la primera premisa tendría que ser $Sf(m = v)$:

1	$Sf(m = v)$		**h**
2	$Sf(m = p)$		**h**
3	Sf	$m = v$	1 **i**
4		$m = p$	2 **i**
5		$v = p$	3, 4 **ei**
6	$Sf(v = p)$		3-5 **is**

Si Fulano sabe que la estrella matutina es idéntica a la vespertina, entonces, si sabe que aquélla es Venus, sabe también que ésta lo es.

Las problemas epistémicos y modales (12.2.4) de la identidad sugieren que hay que controlar los ambientes lógicos en que aparece.

14.4 Ética

La lógica deóntica fue discutida en la escolástica medieval por Leibniz (9.2.5, 9.3) y fue formulada en nuestro siglo por G. H. von Wright, O. Becker y G. Kalinowski.[143] Pero elementos de una lógica de la obligación se encuentran a lo largo de la historia de la filosofía.

14.4.1 Virtud

Hemos insistido en la necesidad de distinguir entre la forma lógica y las interpretaciones asociadas con ella (introducción y 4.1.3). Los operadores modales admiten muchos sentidos y hay varias lecturas de los deónticos; p. ej., *Op* se lee "es obligatorio que *p*", "debe ser el caso que *p*", entre otras maneras.

Por otro lado, los lógicos quieren ordinariamente que sus sistemas sean lo más neutrales posible en cuanto a las varias teorías éticas. Se contrasta hoy[144] una ética de la obligación, regla o "ley", con una ética tomista y aristotélica de la "virtud" o del "buen carácter". Sin embargo, la lógica deóntica también está presente en una ética de la virtud si se asume que el agente moral puede realizar actos (u omisiones) contrarios a la virtud (el "vicio"). El operador fuerte *Op* podría leerse "es según la virtud (*aretē*) o virtuoso, que *p*" y simbolizarse como *Ap*, y "es contra la virtud que *p*" sería *A~p*. Tenemos, pues, el siguiente cuadro, en el que valen todas las relaciones lógicas:

Ap es según la virtud que *p*	*A~p* es contra la virtud que *p*
~A~p no es contra la virtud que *p*	*~Ap* no es contra la virtud que no *p*

~A~p & ~Ap
no es contra la virtud
ni que *p* ni que no *p*

Si se prefiere una definición más amplia de la virtud (6.1.2) para que incluya las obras de la supererogación más allá de la obligación, se desplaza la noción de lo que debe ser el caso, pero sigue vigente el cuadro de oposición (empleamos los operadores usuales *O*, *L*, *V* e *I*). Sólo hay que agregar los principios, donde *A'p* simboliza esta noción más inclusiva de la virtud y *Cp*: "es según la caridad que *p*"):

[143] "Un logicien déontique avant la lettre: Gottfried Wilhelm Leibniz", *Archiv für Rechts-und Sozialphilosophie*, 60, 1(1974), pp. 79-98.

[144] Después de la publicación de *After Virtue* por Alasdair C. MacIntyre, 1980.

$A'p <> [Op \vee Cp]$
$Cp > Ip$

es decir, la virtud incluye, por así decirlo, "la justicia y la caridad" y la caridad no es ni obligatoria ni prohibida.

14.4.2 Deber, posibilidad y libertad

Que el deber presuponga el poder se ha propuesto como ejemplo de una proposición necesaria (8.4.3): en todo mundo posible en que hay agentes morales, no existirían obligaciones morales que no pudieran cumplirse. Kant dijo que el *Sollen* implica el *Können*:

$$Op \quad \rightarrow \quad \Diamond p$$

y los escolásticos afirmaban la contraposición: *nemo tenetur ad impossible*:

$$\sim\Diamond p \quad \rightarrow \quad \sim Op$$

Pero el sentido de "poder" aquí es más complejo, pues se trata de lo que los escolásticos llamaban la posibilidad "según una potencia". También hemos estipulado que no hay obligación cuando se trata de un absurdo, $\sim O\wedge$ (p. ej., que haya que ayudar a los necesitados y no haya que ayudarlos: $O[p \,\&\, \sim p]$).

También se ha aseverado que el deber ético es imposible sin la libertad (en el sentido estricto tradicional —no atenuado— del libre albedrío), y la tesis puede verse como variante de la anterior (Lp: hay libertad para hacer que p):

$$Op \quad \rightarrow \quad Lp$$

Podemos imaginarnos este altercado entre el determinista y el indeterminista —ambos aceptando el mismo principio como premisa:

1	$Op \rightarrow Lp$	**h**
2	$\sim Lp$	**h**
3	$\sim Op$	1, 2 **mt**

La negación de la libertad conduce a la de la moral.

1	$Op \rightarrow Lp$	**h**
2	Op	**h**
3	Lp	1, 2 **mp**

La afirmación de la moral conduce a la de la libertad.

14.4.3 Cuadros utópicos y antiutópicos

Como en la lógica doxástica, y a diferencia de la epistémica del saber, el sistema deóntico carece del vínculo con la verdad, e. d., le faltan los principios $Op > p$ y $p > Lp$ (así como tampoco se permite $Cfp > p$ ni $p > Lfp$). Pues, desgraciadamente, en el mundo real no se cumplen todas las obligaciones ni es lícito todo lo que ocurre.

No obstante, podemos concebir una utopía modal en que valgan $Op > p$ y $p > Lp$. Hay en efecto un número infinito de mundos posibles en los cuales se cumple toda obligación y no se quebranta ninguna prohibición. Y también hay una infinidad de mundos en que siempre se falta a la obligacíon.

Podemos construir, pues, cuadros deónticos "utópicos" y "antiutópicos":

utópico		*antiutópico*	
Op	Vp	Op	Vp
p	$\sim p$	$\sim p$	p
Lp	$L\sim p$	Lp	$L\sim p$
Lp & $L\sim p$		Lp & $L\sim p$	

Note que en ambos conjuntos de mundos hay actos indiferentes. La única diferencia entre ellos es que el vínculo celestial representa el cumplimiento de la obligación y el infernal representa su incumplimiento, y la estructura de la obligación, prohibición e "indiferencia" es la misma.

14.4.4 La conciencia

Hemos mencionado (6.1) la tradición ética según la cual la responsabilidad moral personal requiere que se actúe consciente e intencionadamente. Si los epítetos "laudable" y "censurable" han de poderse aplicar, pues, la moralidad objetiva (lo que debe o puede ser el caso moralmente) tiene que ceder en cierto sentido a la actitud subjetiva (lo que se *cree* que debe o puede ser el caso). Es el ámbito de la *conciencia*. Por lo tanto, en el esquema presentado arriba (6.1.2), a la proposición deóntica debe añadírsele una dimensión epistémica (*Sf*, *Cf*...):

creencia moral	*acción u omisión*	
	p	$\sim p$
$CfOp$	laudable	censurable
$CfVp$	censurable	laudable
$CfIp$	—	—

Digamos que p es "pagar todos los impuestos" y, supongamos que en ciertas circunstancias no es obligación ética. Si Fulano cree racionalmente —aunque no sea V— que debe pagar los impuestos, es laudable si lo hace y censurable si no lo hace.

Los filósofos escolásticos tardíos investigaban la relación entre las expresiones epistémicas y deónticas bajo la rúbrica del "probabilismo". Distinguían tres actitudes, representables *mutatis mutandis*[145] con los símbolos epistémicos usuales:

certeza	*opinión*	*vacilación*
$SfOp$	$CfOp$	$\sim CfOp$ & $\sim Cf\sim Op$
$SfVp$	$CfVp$	$\sim CfVp$ & $\sim Cf\sim Vp$
$SfLp$	$CfLp$	$\sim CfLp$ & $\sim Cf\sim Lp$

Fulano puede actuar honradamente si cree racionalmente (o si sabe) que la propiedad moral (O, L, V, I) es aplicable a la situación que enfrenta. El problema surge en el caso de la vacilación, cuando ni cree que p es obligatorio (prohibido, lícito) ni tampoco cree que no lo es. Los eticistas escolásticos analizaban cuidadosamente los casos de la "vacilación positiva": cuando existen buenos argumentos tanto en favor como en contra de la cualidad moral de la situación, e. d., argumentos que apoyan tanto Op (Vp, Lp, Ip) como $\sim Op$ ($\sim Vp$, $\sim Lp$, $\sim Ip$).[146]

Por otra parte, ofrecían un modelo del proceso de decisión moral según un argumento idealizado de tres premisas cuya conclusión es el fallo de la conciencia. Las dos primeras premisas son generales y por ende contienen variables para la situación moralmente significativa, la cual para los escolásticos incluía el acto (u omisión), las circunstancias y la intención del agente (6.1.2).

La primera premisa es un imperativo que presta a las situaciones su carácter ético relacionándolas con el bien o mal morales (Bp, Mp). Si queremos admitir un doble imperativo, "hacer el bien" y "evitar el mal":

$$Bp <> Op$$

y

$$Mp <> Vp$$

podemos derivar los principios:

$$\sim Mp <> Lp$$

[145] Mi fuente es B. H. Merkelbach, *Summa Theologiae Moralis* (Lovaina, Desclée de Brouwer et Cie., 1954), 3 tomos, tomo 2, pp. 40-129. Los escolásticos hablaban en este contexto del "estar seguro" sin equipararlo con el "saber" (*Sfp*), ni, por ende, presuponían el vínculo con la verdad. Elaboraban un cálculo de "probabilidades", donde "probable" significa "apoyable por (varios grados de) evidencia racional (*ratio gravis*)", o sea, por los varios niveles de seriedad de los argumentos.

[146] *Dubium positivum*; es trivial el caso del *negativum*, en que la vacilación se debe a la falta de argumentos en favor y en contra de la cualidad moral de la situación.

y

$$[\sim Bp \ \& \ \sim Mp] <> Ip$$[147]

La segunda premisa es la ética normativa, la cual liga la situación general con la moralidad (*B*, *M*); evidentemente es el punto decisivo y presupone el razonamiento ético. Los escolásticos la consideraban como el punto débil donde los errores, si los hay, se cometen. Si usamos el aborto (*A*) como ejemplo, tenemos, según las dos opiniones:

$$Ap > Mp$$

o

$$\sim[Ap > Mp]$$

"una situación del aborto es mala" o "...no es mala", proposiciones de las que se siguen:

$$Ap > Vp$$

y

$$Ap > Lp$$

"el aborto es prohibido" o "lícito".

La tercera premisa es particular y, porque representa, como la conclusión, la situación concreta, contendrá una constante. *S* aquí es una constante proposicional que expresa que un agente específico procura un aborto en estas circunstancias. La premisa representa, pues, una "casuística" que relaciona las situaciones generales con los casos concretos.

El argumento entero sería:

GENERAL					
imperativo	1	$Mp <> Vp$	1	$\sim Mp <> Lp$	**h**
ética normativa	2	$Ap > Mp$	2	$Ap > \sim Mp$	**h**
PARTICULAR					
casuística	3	AS	3	AS	**h**
	4	$Ap > Vp$	4	$Ap > Lp$	1, 2 transit.
	5	$AS > VS$	5	$AS > LS$	4 **ecu** S/p[148]
decisión	6	VS	6	LS	3, 5 **mp**

[147] En esta interpretación de *B* y *M*, un acto de supererogación no sería "bueno"; pero se podría dar cuenta de este caso fácilmente (14.4.1). Una alternativa sería usar sólo *Bp* y definir *M* como ~*B*; en este caso habría que agregar un criterio para distinguir entre lo obligatorio y lo indiferente.

[148] No hemos expresado la cuantificación sobre la variable proposicional *p*.

Estos argumentos, por carecer de operadores epistémicos, representarían, por así decirlo, la objetividad moral. Pero en la conciencia incluye la subjetividad. Digamos que Fulano (*f*) se opone al aborto y Mengano (*m*) lo permite:

1	$Sf[Mp <> Vp]$		1	$Sm[\sim Mp <> Lp]$	**h**
2	$Cf[Ap > Mp]$		2	$Cm[Ap > \sim Mp]$	**h**
3	$SfAS$		3	$SmAS$	**h**
4	Cf	$Ap > Vp$	4	Cm	$Ap > Lp$	1, 2 **i**...
5		$AS > VS$	5		$AS > LS$	4 **ecu** S/p[149]
6		VS	6		LS	3, 5 **mp**
7	$CfVS$		7	$CmLS$		4-6 **ib**

El posible conflicto entre la moral objetiva y subjetiva puede verse como una paradoja (14.4.5).

14.4.5 Paradojas

En la lógica deóntica actual (y medieval, 9.2.5) se han propuesto muchos rompecabezas: pruebas en las que de premisas aceptadas y aparentemente inocentes se derivan conclusiones sorprendentes, si no absurdas. Los problemas revelan lo difícil que es adecuar la filosofía a un sistema formal y traducir el simbolismo al lenguaje ordinario. En la siguiente exposición altero en algo los ejemplos; la discusión es compleja y no hago más que sugerir unas soluciones.

Comencemos con una paradoja que resulta del concepto de conciencia presentado arriba (14.4.4). Supongamos que objetivamente don Quijote no está obligado a enristrar al barbero con el lanzón bajo: $\sim OE$, pero subjetivamente cree que debe enristrarlo ($CqOE$; note que representa la decisión de la conciencia, paso 7 de la última prueba de 14.4.4; su error estaría en la segunda premisa, la ética normativa). Parece que si *cree* que debe, entonces realmente *debe*: $CfOE > OE$, y ¡tenemos un vínculo con la verdad en el caso de la creencia ética! Llamemos la implicación del tipo $CfMp > Mp$, donde M hace las veces de un operador deóntico, "el principio de la vigencia de la conciencia". Sería expresable como una regla, la cual se aplicaría así:

1	$CfMp$	
2	Mp	1 vigencia de la conciencia

donde p incluye referencia a f como el agente afectado por la propiedad moral expresada por M. Obtenemos, pues, una contradicción:

1	$\sim OE$	**h** (norma objetiva)
2	$CqOE$	**h** (conciencia de don Quijote)
3	OE	2 vigencia de la conciencia

[149] No hemos expresado la cuantificación sobre la variable proposicional p.

Una solución simple sería abogar por un relativismo o subjetivismo moral: no hay normas objetivas. En este caso no valdría el primer paso *~OE*, y por ende nada contradiría el tercer paso *OE*. Otras soluciones son menos radicales. Podría referirse la moralidad objetiva a un conjunto de mundos posibles epistémicamente ideales (14.4.3), o podrían distinguirse un sentido objetivo y otro subjetivo de los predicados morales o condicionarlos de varias maneras.

En una discusión temprana de las inferencias deónticas, Abelardo presentó el caso del juez (*j*) que debe castigar a Zutano (*Cx*: "*x* manda castigar a Zutano") porque el testimonio dice que es culpable (*Tp*: "el testimonio del tribunal dice que *p*", *R*: "Zutano es reo"), pero sabe, digamos por información no admitida en el proceso, que es inocente:

1	*TR > OCj*	**h**
2	*~R > O~Cj*	**h**
3	*TR*	**h**
4	*Sj~R*	**h**
5	*OCj*	1, 3 **mp**
6	*~R*	4 **es**
7	*O~Cj*	2, 6 **mp**

donde los pasos 5 y 7 conducen a una contradicción.[150] Las premisas se leen: "si el testimonio del tribunal dice que Zutano es culpable, entonces el juez debe castigarlo", "si Zutano no es culpable, el juez no debe castigarlo", "el testimonio dice que Zutano es culpable" y "el juez sabe que Zutano no es culpable".

La siguiente es una paradoja (Ross) que incluye la regla de la introducción de la disyunción (*Axy*: x ayuda a y; *Rxy: x* roba a *y*):

1	*OAfm*	**h**
2	*O* | *Afm*	1 **i**
3	| *Afm* v *Rfm*	2 **id**
4	*O*[*Afm* v *Rfm*]	2-3 **io**

Es decir, si Fulano tiene que ayudar a Mengano, entonces tiene que ayudarlo o robarlo.

El argumento es paradójico porque tenemos un dato que no se expresa: es prohibido que Fulano lo robe: *VMfm*. Cuando agregamos el dato tácito a la conclusión de arriba, obtenemos:

[150] *Ethics*, p. 38 y ss, en Knuuttila, *Modalities*..., p.182 y ss.

1	$O[Afm \vee Rfm]$	**h** (de arriba)
2	$VRfm$	**h**
3	$O \mid Afm \vee Rfm$	1 **i**
4	$\mid \sim Rfm$	2 **i**
5	$\mid Afm$	3, 4 **sd**
6	$OAfm$	3-5 **io**

donde la conclusión no es sino la premisa de la prueba anterior.

La lógica deóntica contiene las paradojas de la implicación que desempeñaron un papel en la historia de la modal en este siglo, y aparecen los principios modales *ex impossibile sequitur quodlibet* y *necessarium sequitur ex quolibet* (9.4.1). En la lógica deóntica aparecen como:

$Op > O[q > p]$
$Vp > O[p > q]$

Los dos salen con io; p. ej., el segundo ($Vp <> O{\sim}p$):

1	Vp	**h**
2	$O \mid p$	**h**
3		
4	$\mid \sim p$	1 **i**
5	$\mid q$	2, 3 **eng**
6	$p > q$	2-5 **ii**
7	$O[p > q]$	2-6 **io**
8	$Vp > O[p > q]$	1-7 **ii**

El resultado se ha traducido: "hacer lo prohibido nos obliga a hacer todo" y se ha ofrecido este ejemplo: si me es prohibido faltar a las promesas, entonces debe ser el caso que si falto a una promesa, estoy obligado a robar a los pobres (o cualquier otra cosa).[151]

También aparece la paradoja en la lógica epistémica:

$Sfp > Sf[q > p]$
$Sf{\sim}p > Sf[p > q]$

$Cfp > Cf[q > p]$
$Cf{\sim}p > Cf[p > q]$

pues si sé que no llueve, entonces sé que si llueve soy el rey de China. Es un aspecto del problema del conocimiento de las conclusiones lógicas (14.3.2).

[151] Snyder, p.193.

Se podría responder que efectivamente es así: quebrantar una ley moral es un absurdo ético, así como afirmar una imposibilidad es un absurdo lógico y saber una falsedad, no es epistémico. Se ha insistido[152] en que las fórmulas suenan extrañas sólo cuando se leen como implicación, porque cuando oímos la palabra "si" percibimos sentidos fuera de la pura función veritativa. Parece más razonable cuando el consecuente asume la forma equivalente de $V[p \& \sim q]$:

$$Vp > V[p \& \sim q]$$

Por ejemplo, si no debo faltar a las promesas, entonces me es prohibido faltar a las promesas y no robar a los pobres, pues una vez que p es prohibido, lo sigue siendo no importa con qué otra cosa se conjugue. Se ha aplicado la lógica de la relevancia para evitar esta supuesta paradoja. En ella la frase "si p, entonces q" se interpreta como la relación de la "implicación moral" entre p y q.

También se podría contestar que el sentido de una implicación obligatoria no es clara a primera vista y que sería mejor traducir "si falto a una promesa estoy obligado a hacer cualquier cosa" no *de dicto* ($O[p > q]$), sino *de re*: $p > Oq$ (9.2.2). La versión *de re*, $Vp > [p > Oq]$, no es una verdad lógica.

Sin embargo, el problema es parecido al del ejemplo anterior: hay datos ocultos. El argumento es paradójico porque sabemos no sólo que no estamos obligados a hacer todo sino que hay mucho que debemos evitar (como robar a los pobres). Repetimos lo que hicimos antes, tomando la conclusión y agregándole Vq (sigamos usando variables).

1	$O[p > q]$	**h** (de arriba)
2	Vq	**h**
3	O | $\sim q$	2 **i**
4	| $p > q$	1 **i**
5	| $\sim p$	3, 4 **mt**
6	Vp	3, 4-6 **el**

donde la conclusión es la premisa de la prueba anterior. El caso es exactamente paralelo, porque la implicación equivale a una disyunción ($O[p > q] <> O[\sim p \vee q]$).

Otra paradoja parece mostrar que todo incluye la obligación moral:

1	O |	verdad lógica
2	$O\,[p \vee \sim p]$	1 **io**

Por ejemplo, es obligatorio o que me rasgo la cabeza o que no me la rasgo, lo cual es un absurdo.

Observemos en primer lugar que para traducir "es obligatorio o que me rasgo la cabeza o que no me la rasgo" parece mejor una formalización *de re*: $Op \vee O\sim p$, fórmula que no es verdad lógica. Por otro lado, los actos indiferentes, $\sim Op$, y prohibidos, Vp, son consistentes con $O[p \vee \sim p]$; luego este principio no los excluye. $Op \vee O\sim p$ sí implica que no hay situaciones indiferentes ($Op \vee O\sim p > \sim[Lp \& Lvp]$). Se podría estipular simplemente, como Snyder, que las verdades lógicas no son moralmente obligatorias.

Otra paradoja (Åquist) parece implicar que si Fulano debe ayudar a Mengano, quien es robado por Zutano, entonces Zutano debe robar a Mengano:

[152] Snyder, p. 247.

1	$O\ [Afm\ \&\ Rzm]$	**h**
2	$O \mid Afm\ \&\ Rzm$	1 **i**
3	$\mid Rzm$	2 **ec**
4	$ORzm$	2-3 **io**

Conviene traducir de manera *de re*: "Fulano tiene que ayudar a Mengano a quien Zutano roba" ($OAfm\ \&\ Rzm$) Un sistema deóntico con expresión del agente moral evitaría el problema, porque restringiría la obligación a Fulano.

Otra paradoja parecida (Prior):

1	$VRfm$	**h**
2	$O \mid \sim Rfm$	1 **i**
3	$\mid \sim Azm \vee \sim Rfm$	2 **id**
4	$\mid \sim[Azm\ \&\ Rfm]$	3 **oc**
5	$O\sim[Azm\ \&\ Rfm]$	2-4 **io**
6	$V[Azm\ \&\ Rfm]$	5 $\mathbf{r}_{df}$

O sea, si Fulano no debe robar a Mengano, entonces no debe ser el caso que Zutano ayude a Mengano, quien es robado por Fulano.

En primer lugar, se podía preferir una traducción *de re*: $VAz\ \&\ Rfm$. En todo caso, si se acepta $V[Azm\ \&\ Rfm]$ como correcto por contener el conjunto una injusticia, parece paradójico porque sabemos algo inexpresado: que no es prohibido ayudar a Mengano: $\sim VAfm$. Podríamos repetir el proceso de arriba, agregando $\sim VAfm$ a la conclusión $V[Azm\ \&\ Rfm]$ para obtener la premisa de arriba: $VRfm$. Un sistema que especificara al agente moral también evitaría el problema.

Según la siguiente paradoja (P. H. Nowell-Smith, E. J. Lemmon), parece que no se permite que Fulano se arrepienta (Afp: Fulano se arrepiente de haber efectuado que p) de haber robado a Mengano ($VAfRfm$). Tenemos que hacer la presuposición razonable de que si Fulano se arrepiente de algo, lo ha cometido ($Afp > p$):

1	$VRfm$	**h**
2	$O \mid c \mid AfRfm$	**h**
3	$\mid\ \mid\ AfRfm > Rfm$	2 supuesto
4	$\mid\ \mid\ Rfm$	2, 3 **mp**
5	$\mid\ \mid\ \sim Rfm$	1 **i**
6	$\mid \sim AfRfm$	2-5 **ing**
7	$O\sim AfRfm$	2-6 **io**
8	$VAfRfm$	7 $\mathbf{r}_{df}$

Hay que conceder que si Fulano se arrepiente de haber robado a Mengano, entonces lo robó (paso 3). Sin embargo, tenemos algo, *Rfm*, en la subprueba deóntica que no es una obligación sino más bien una prohibición. Si el arrepentimiento se concibe como obligación se expresaría *de re* y al revés: [*VRfm* & *Rfm*] > *OAfRfm*.

Una paradoja parecida resulta si se reemplaza *AfRfm* con "Mengano lamenta que haya sido robado por Fulano", *LmRfm* (la conclusión sería *VLmRfm*). La respuesta es análoga a la anterior; además, la indicación del agente moral evitaría el problema.

Otra paradoja (P. L. Matt) parece demostrar que no hay que castigar a Fulano cuando ha robado (*Cfp*: Fulano es castigado por efectuar que *p*):

1	*Rfm*	**h**
2	*VRfm*	**h**
3	*O*[*CfRfm* <> *Rfm*]	**h**
4	*O* | ~*Rfm*	1 **i**
5	*O* | *CfRfm* <> *Rfm*	3 **i**
6	*O* | ~*CfRfm*	4, 5 **eci**
7	*O*~*CfRfm*	4-6 **io**
8	*VCfRfm*	7 $\mathbf{r}_{\mathbf{df}}$
9	*Rfm* & *VCfRfm*	1, 8 **ic**

Otra vez, podría expresarse la obligación en el paso 3 como una equivalencia *de re*: *OCfRfm* <> *Rfm*, o mejor *OCfRfm* <> [*Rfm* & *VRfm*]: Fulano debe ser castigado por robar a Mengano si y sólo si lo ha cometido y le es prohibido. Tendríamos esta prueba:

1	*Rfm*	**h**
2	*VRfm*	**h**
3	*OCfRfm* <> [*Rfm* & *VRfm*]	**h**
4	*Rfm* & *VRfm*	1, 2 **ic**
5	*OCfRfm*	3, 4 **eci**

La siguiente paradoja (parecida a una de Åquist) *incluye* la lógica epistémica (*Mx*: *x* es médico; *A*: la apendectomía es la cura del apendicitis):

1	*Mf* > *OSfA*	**h**
2	| *Mf*	**h**
3	| *Mf* > *OSfA*	1 **i**
4	| *OSfA*	2, 3 **mp**
5	| *O* | *SfA*	4 **i**
6	| | *A*	5 **es**
7	| *OA*	5-6 **io**
8	*Mf* > *OA*	2-7 **ii**

La conclusión no parece tener sentido: si Fulano es médico, entonces debe ser el caso que la apendectomía cure el apendicitis. Una respuesta sería que no es precisamente el saber lo que es obligatorio, sino el proceso de adquirir una estrategia práctica. Además, si se dijera que la creencia (e. d., el creer, no el saber) es obligatoria, no podría sacarse la misma conclusión.

14.5 La filosofía del tiempo

14.5.1 Ser y tiempo

El tiempo ha sido objeto del escudriñamiento filosófico desde la antigüedad y los enfoques han sido muy diversos. Para Platón una "separación (*j¯orismos*)" yace entre el ser inmutable, las "ideas" (*eidos, idea, ousia*), y las "cosas" donde el tiempo y el espacio están en juego. Aristóteles concibió el tiempo como medida del movimiento (*ho arithmos t¯es kin¯ese¯os*). Los teólogos patrísticos pensaban en Dios como fuente necesaria de la significación (*ideae divinae*) más allá del tiempo y del lugar de las cosas concretas, las cuales dependen a su vez de su libertad. El tiempo y el espacio para Kant son condiciones apriorísticas de la experiencia sensible. H. Bergson distinguió entre el tiempo y la duración no medible (*durée*), y Heidegger hizo del tiempo un fundamento de su pensamiento.

Últimamente ha habido mucho interés en la lógica del tiempo.[153] Hemos estudiado (7.2) unos sistemas que exhiben los mismos rasgos formales como ciertos sistemas modales, notando el paralelismo entre los operadores fuertes y débiles en muchas áreas de la lógica, incluso en la temporal:

• *fuertes*:	U*xFx*	*Sp*	*Cp*	*Op*	*Hp*	*Gp*
• *débiles*:	E*xFx*	*Pp*	*Tp*	*Lp*	*Pp*	*Fp*

Las lógicas del pasado y del futuro se combinan en un solo sistema (así como las del saber y del creer, pero con diferencias importantes). En varios sistemas los momentos sucesivos son representables por nodos en una línea. Algunos son lineales por consistir de una sola línea temporal y otros permiten la bifurcación hacia el futuro y/o hacia el pasado. Puede imaginarse también líneas temporales paralelas que no se toquen, "historias" independientes.

Los sistemas lineales, si se admite S5, son "densos"; hay momentos entre momentos. P. ej., la implicación $Fp > FFp$, válida sólo en S5, implica que si p es futuro, entonces será el caso que p es futuro: se intercala otro Fp antes de llegar al p. ¡También hay un sistema "nietzscheano" en el que el tiempo describe un círculo!

La interpretación semántica de al menos algunos sistemas lineales es quizás más natural, pues es fácil imaginarse la sucesión temporal como puntos en una línea. Pero ¿qué significan los sistemas en los que hay líneas paralelas del tiempo? Se ha sugerido —no es sino una aplicación entre varias— que los sistemas ramificados de dos rumbos, e. d., hacia futuro y pasado, representan el tiempo descrito por la teoría de la relatividad especial: en cada momento hay varios estados temporales. El tiempo es distinto

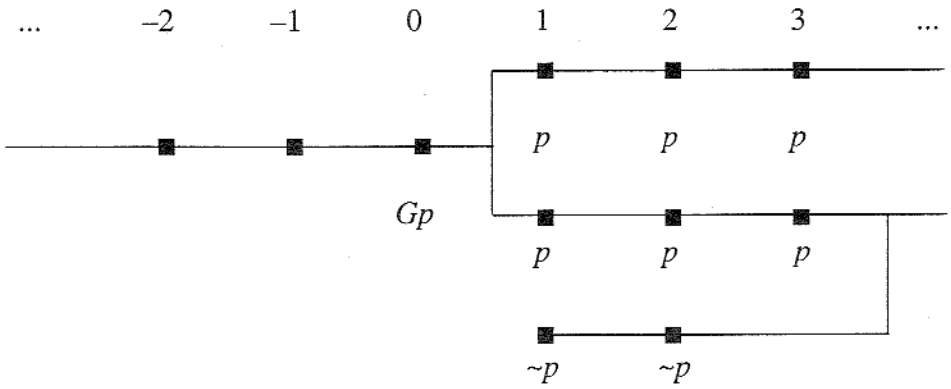
[153] Ver R. P. McArthur, cap.1.

para un astronauta que viaja de ida y vuelta a la tierra en una nave espacial que corre casi a la velocidad de la luz, pues cuando las dos líneas temporales se vuelven a juntar, la gente que se ha quedado en la tierra habrá envejecido más.

En los sistemas que permiten la ramificación tanto para el futuro como para el pasado, se ha afirmado que los operadores tendrán los siguientes sentidos:

- *Fp*: *p* es V en algún nodo a la derecha del presente donde *Fp* es V
- *Gp*: *p* es V en todo nodo a la derecha del presente donde *Gp* es V

Hay que decir, por ejemplo, "donde *Gp* es V" porque *p* puede ser F por la bifurcación hacia el pasado:



Hay aplicaciones interesantes de la lógica del tiempo en la filosofía de la religión. Si es que Dios existe sin o fuera del tiempo, una línea (o varias líneas) puede(n) representar la sucesión "temporal" (la misma palabra "tiempo" connota lo creado) y un punto, puesto fuera de la(s) línea(s) temporal(es) puede representar la eternidad divina independiente.

14.5.2 Modos y tiempos

En la filosofía griega se asociaban el tiempo y la modalidad. El análisis hecho por Aristóteles del cambio natural como un proceso temporal influyó en su desarrollo de la modalidad como potencialidad.[154] Los escolásticos solían desarrollar la lógica modal y la temporal bajo la misma rúbrica, clasificando juntas las oraciones no afectadas por operadores modales y temporales como "del estar-en" (*de inesse*).

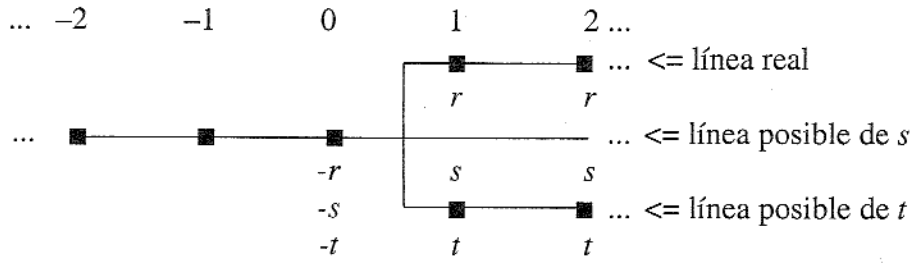
Los sistemas actuales que permiten la bifurcación sólo hacia la derecha, e. d., hacia el futuro, se han interpretado "diodóricamente" (7.1.1): el pasado es fijo y el futuro representa varios estados temporales posibles de los cuales sólo uno se realizará. Se ha propuesto varias maneras de distinguir entre los futuros meramente posibles y el real que se actualizará. El nombre de uno de tales sistemas, "OT", hace recuerdo de la doctrina de la contingencia futura de Guillermo de Ockham. El sentido de los operadores sería:

[154] Knuuttila, *Modalities...*, pp.19 y ss.

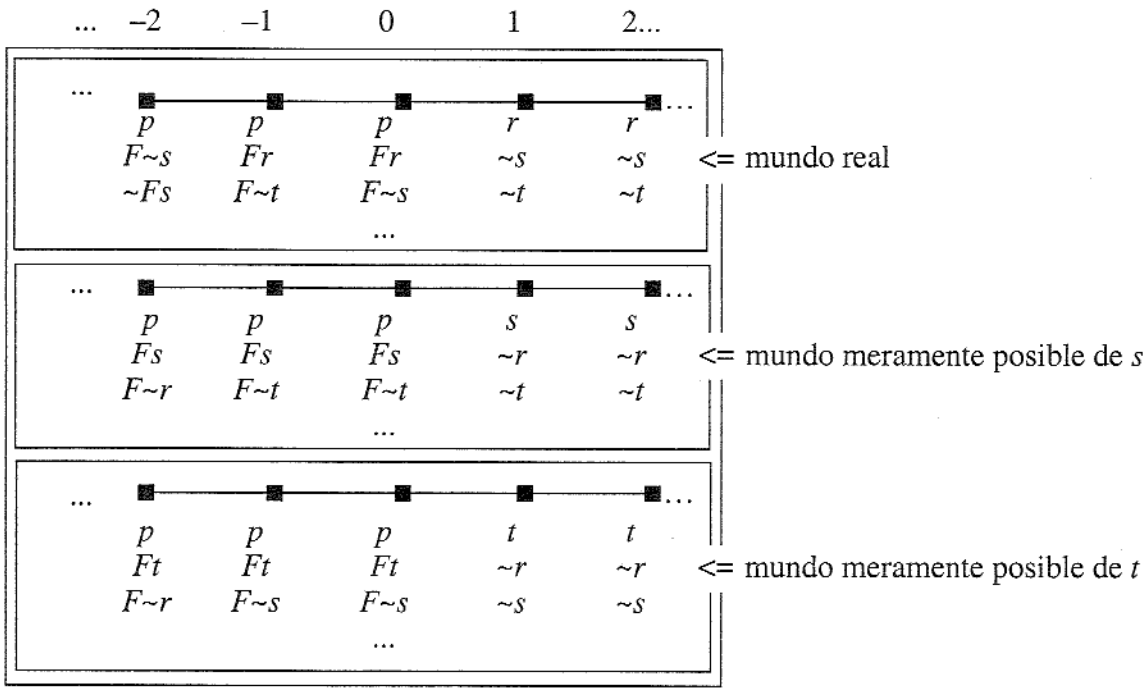
Fp: posiblemente será el caso que *p*
Gp: necesariamente será el caso que *p*

Se trata en este caso de un "siempre futuro" (*Gp*) sin más, porque no se permite la bifurcación hacia el pasado. En tales sistemas, si las posibilidades "desaparecen" en el nodo donde comienza la realización de una línea temporal, se trata de la idea diacrónica griega (9.1), pero si las posibilidades "siguen" corriendo paralelas a la línea realizada, tenemos el sentido sincrónico (9.2.1).

Si se da una interpretación modal (sincrónica) a la bifurcación hacia el futuro, una sola línea representará el porvenir real y las otras representan meras posibilidades: lo que pudiera haber sido. Hay, pues, que asignar estas líneas a otros mundos posibles. Tomemos el caso de la decisión: digamos que una persona tiene tres opciones, *r*, *s* y *t*, y que escoge *r*. Esta opción comenzará (y las opciones descartadas *s* y *t* comenzarían) en el primer momento del futuro (1). La bifurcación sería:



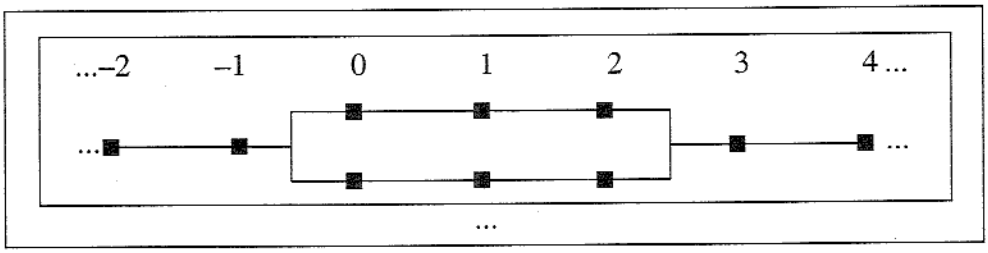
Claro, en el momento 1 de la línea real, ~*s* y ~*t* serán V con *r*, y así análogamente para las líneas de *s* y *t*. El siguiente esquema ilustra la bifurcación a través de los mundos posibles (asumimos un paralelismo de los momentos temporales). Los tres mundos son una muestra del conjunto de todos los mundos en que las situaciones son iguales hasta el presente (0); *p* indica esta igualdad. Evidentemente, no se incluyen todas las proposiciones temporales pertinentes (p. ej., en el mundo real faltan en –2: *F~t*, *FFr*, etcétera):



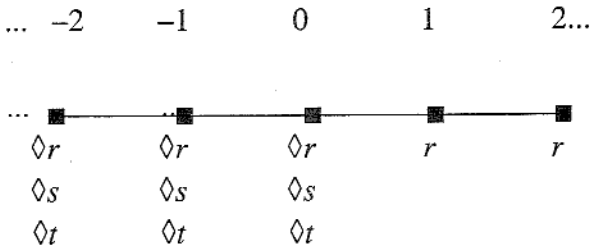
...

Note que el estado previo y actual de los mundos (–2, –1, 0) no puede ser totalmente igual en los tres mundos, porque, aunque todo lo demás (p) sea igual, las proposiciones temporales (infinitas en número) son distintas; por ejemplo, en el momento –2 del pasado Fs es V en el mundo de s y contradice $F{\sim}s$ y ${\sim}Fs$ las cuales son V en el mundo real (${\sim}Fs > F{\sim}s$). Estas proposiciones serían, desde la perspectiva del mundo real $\Diamond F{\sim}s$ y $\Diamond{\sim}Fs$.

La "bifurcación", pues, se extiende a otros mundos posibles. Pero una ramificación en más de una línea temporal se quedaría dentro de un mundo posible, si se da tal caso, como en el siguiente esquema:

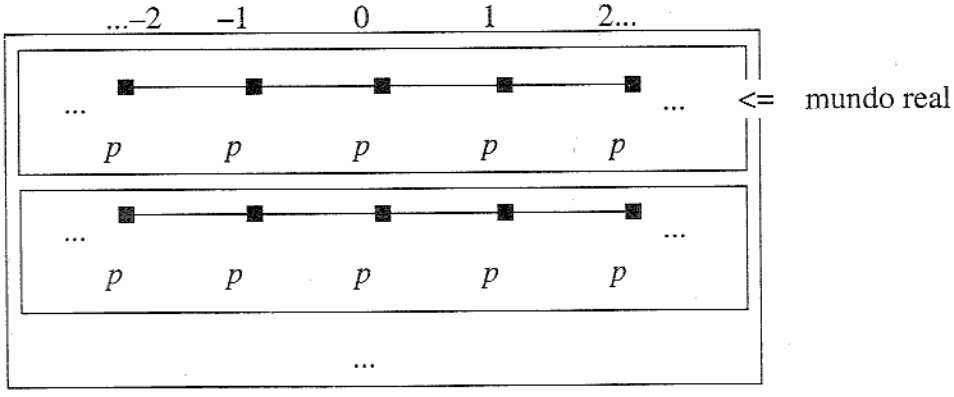


En la interpretación sincrónica de arriba, las posibilidades no realizadas, s y t, no "desaparecen" al realizarse r. Pero sí lo harían si la interpretación fuera diacrónica:

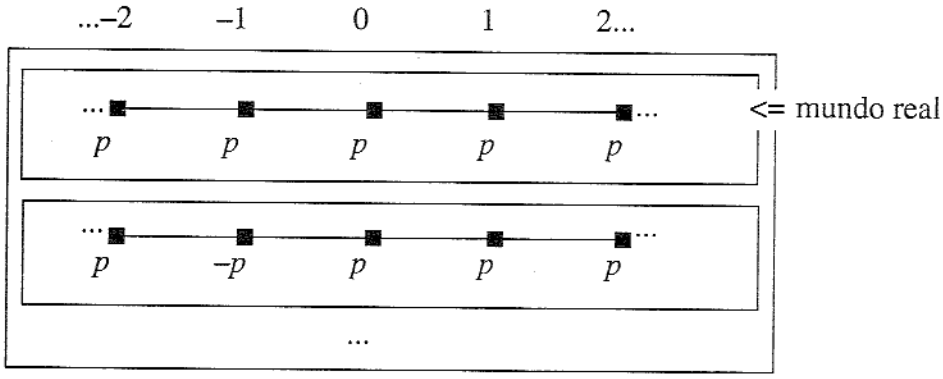


El esquema sugiere por qué los griegos se inclinaban a una noción estadística y determinista de la modalidad.

Veamos cómo se contrasta la necesidad lógica con la física o nómica. Para ilustrarlo basta un diagrama de dos mundos posibles. En este caso, la necesidad es lógica ($\Box p$):



Note que p es "siempre V" en cada mundo. El siguiente esquema muestra la necesidad nómica. Si p es físicamente necesario, tenemos, p. ejemplo:



En este caso p, que representa una constancia natural en el mundo real, es lógicamente contingente ($\sim p$ es V en –1 del mundo inferior).

14.6 Filosofía de la religión

14.6.1 La lógica epistémica

La lógica formaba parte de la teología filosófica en el pasado y se emplea frecuentemente en la filosofía de la religión actual. En efecto, muchos de los análisis de nuestros días son aplicaciones de la lógica simbólica a problemas que desde hace siglos desafían a los pensadores.

14.6.1.1 Saber divino y determinismo

Santo Tomás de Aquino[155] y otros escolásticos aplicaban la distinción *de dicto/de re* (9.2.2) al problema de la modalidad del saber divino. La interpretación *de re* de "todo lo que Dios sabe es necesario":

$$Sdp > \Box p$$

entraña el determinismo, pues p expresa cualquier proposición V. En efecto, si también admitimos otra premisa relativa a la omnisciencia divina, $p > Sdp$, tenemos:

1	$Sdp > \Box p$	**h**
2	$p > Sdp$	**h**
3	$p > \Box p$	1, 2 **ti**

o sea, que toda verdad es necesaria. Pero la formulación *de dicto* de la primera premisa:

$$\Box[Sdp > p]$$

[155] *Summa theologica*, 1:14:3.

es consistente con el indeterminismo, pues sólo significa que es necesario que sea V lo que sabe Dios, o cualquier otra persona, como notó san Agustín.

14.6.1.2 Inconsistencia epistémica y fe

Santo Tomás, siguiendo a la tradición cristiana, consideró que la fe combina la verdad y la ignorancia. Es decir, si Fulano acepta una proposición *p* por la fe (*Ffp*), entonces *p* es V (*p*) pero Fulano no sabe que *p* es V (*~Sfp*):

$$Ffp > [p \ \& \ {\sim}Sfp]$$

Pero el consecuente, la conjunción *p* & *~Sfp*, es epistémicamente inconsistente o indefendible (5.5, 14.3.3)[156] y, por ende, la fe es epistémicamente (no lógicamente) inconsistente:

1	*c*	*SfFfp*	**h**
2		*Ffp*	1 **es**
3		*p & ~Sfp*	2 principio tomista
4		*~Sfp*	3 **ec**
5		*Sf* *S fFfp*	1 **i**
6		*Ffp*	5 **es**
7		*p & ~Sfp*	6 principio tomista
8		*p*	7 **ec**
9		*Sfp*	5-8 **is**
10		*~SfFfp*	1-8 **ing**

Es un teorema de la teología filosófica tomista, pues, que el creyente no sabe que tenga fe. Por otro lado, puede saber la verdad de ciertas proposiciones de Dios abiertas a la razón, los "preámbulos de la fe" (*praeambula fidei*).

14.6.2 Existencia de Dios

La modalidad es pertinente a varios tipos de argumentos de la existencia de Dios,[157] pero es el famoso "argumento ontológico" de san Anselmo del siglo XI lo que ha llamado mucha atención últimamente. Su razonamiento descansa sobre la descripción definida de Dios como "el ser sobre el cual no cabe pensarse nada mayor" (*id quo majus cogitari nequit*). Muchos filósofos posteriores, como Descartes, Leibniz y Hegel, han propuesto variaciones del argumento. Anselmo mismo lo formuló de dos maneras: modal y asertóricamente. Hay varias reformulaciones del argumento ontológico hoy, tanto modales como asertóricas en la lógica libre. Veamos una reformulación modal y una asertórica.

[156] Hintikka, *Epistemic Logic*, p. 100.

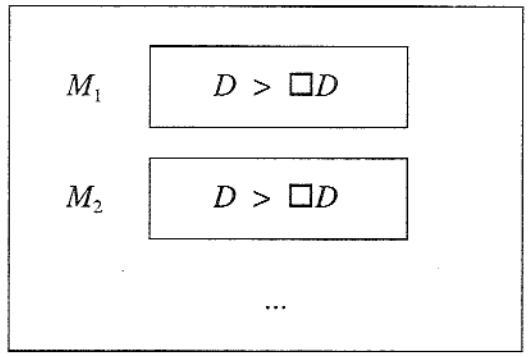
[157] Un ejemplo de una versión del principio de razón suficiente, matizable de varias maneras, que puede ser constituyente de un argumento cosmológico (*Cqp*: dar *q* cuenta existencialmente de *p*) es: $UpEq[[p \ \& \ \Diamond{\sim}p \ \& \ p \neq Cqp] > [Cqp \ \& \ p \neq q \ \& \ ®q]]$.

14.6.2.1 Argumentos ontológicos modales

He aquí una reformulación de la versión de C. Hartshorne, válida en S5.[158] "D" es abreviatura de $Ex\theta x$: existe algo a que conviene θ, el conjunto (o la conjunción) de los atributos que constituyen la perfección mayor. Note que la existencia se expresa mediante la cuantificación usual, no "como predicado".

1	$\Box\ [D > \Box D]$	**h**
2	$\Diamond D$	**h**
3	$c \quad \sim\Box D$	**h**
4	$\Diamond D$	2 **i**
5	$\Box \quad c \quad D$	**h**
6	$D > \Box D$	1 **i** (T)
7	$\Box D$	5, 6 **mp**
8	$\sim\Box D$	3 **i** (S5)
9	$\sim D$	5-8 **ing**
10	$\Box\sim D$	5-9 **in**
11	$\sim\Diamond D$	10 **pn**
12	$\Box D$	3-11 **ing**

El argumento se puede parafrasear en términos de los mundos posibles de la manera siguiente: es V en todo mundo posible que *si* Dios (con los atributos θ) existe, tiene que existir, porque de otra manera no se trataría de Dios (la definición ortodoxa de Dios es el ser necesario). La primera premisa, pues, dice que $D > \Box D$ es V en todo mundo:



[158] *The Necessarily Existent*, 1941; la formulación es mía e incluye el principio fuerte de reducción en la lógica. Plantinga ofreció una versión más compleja en *The Nature of Necessity*. N. Malcolm presentó una versión parecida, en *The Philosophical Review*, núm. lxix, 1960. Ver A. Plantinga, *The Ontological Argument, from St. Anselm to contemporary philosophers*, 1965.

La segunda premisa dice que Dios puede existir; e. d., D es V en al menos un mundo, digamos M_2:

M_2	$D > \Box D$	
	D	

Pero existe necesariamente en m_2, porque en todo mundo si Dios existe, tiene que existir (por **mp**):

M_2	$\Box D$	

Además, si es V en un mundo posible que existe necesariamente, e. d., que existe en todo mundo posible, entonces su existencia es necesaria:

M_1	D
M_2	D
M_3	D
	...

Si se admite sólo la premisa "anselmiana" como premisa, sin la de la posibilidad de la existencia de Dios, puede establecerse la incontingencia de Dios, $\sim\nabla D$ ($\Box D$ v $\sim\Diamond D$) en S5: Dios es necesario o imposible. En la prueba siguiente, cuando los pasos son los mismos que en la anterior, conservamos su número y las letras a, b y c designan los tres pasos agregados.

1	$\Box[D > \Box D]$	**h**
a	c | $\Diamond D$ & $\sim\Box D$	**h**
3	$\sim\Box D$	a **ec**
4	$\Diamond D$	a **ec**
5	$\Box$ | c | D	2 **i**
6	$D > \Box D$	1 **i** (T)
7	$\Box D$	5, 6 **mp**
8	$\sim\Box D$	3 **i** (S5)
9	$\sim D$	5-8 **ing**
10	$\Box\sim D$	5-9 **in**
11	$\sim\Diamond D$	10 **pn**
b	$\sim[\Diamond D$ & $\sim\Box D]$	a-11 **ing**
c	$\sim\nabla D$	b, $\mathbf{r}_{df}$

Y si la existencia de Dios es contingente, $\Box D$ v $\sim\Diamond D$, entonces la admisión de su posibilidad ($\Diamond D$) entraña su necesidad por **sd**.

Plantinga ofreció una versión más compleja en la cual distingue entre la propiedad universal (en el segundo sentido, 11.5) de ser lo más grade en todo mundo posible y la propiedad de ser lo más grande en al menos un mundo posible.[159]

14.6.2.2 Argumentos ontológicos asertóricos

Hemos visto (3.5) que en la lógica libre no podemos aplicar las reglas **ice** y **ecu** sin agregar una premisa que constate la existencia del objeto aludido. De Aq ("don Quijote arremete contra los molinos de viento"), pues, no podemos inferir $ExAx$ sin afirmar que existe algo que sea idéntico con don Quijote: $Ex(x = q)$. La lógica modal no necesita tal restricción, porque la existencia se asocia con los mundos posibles. De $\Diamond Aq$ podemos concluir, p. ej., $\Diamond ExAx$ o $Ex\Diamond Ax$, pero no $ExAx$.

Las versiones modales del argumento ontológico no son circulares y la conclusión se sigue de todas las premisas, no de una sola de ellas. William E. Mann propuso un argumento ontológico asertórico que evitaría la circularidad empleando la lógica libre.[160] Sea Nx :"no puede concebirse nada mayor que x", e. d., x es el ser sobre el que no cabe pensarse nada mayor. El símbolo n servirá como abreviatura de la descripción ιxNx, "la cosa única sobre la cual no cabe pensarse nada mayor" y d será el nombre o una descripión definida de Dios[161] (3.1.3). En la lógica usual (no libre), si permitiéramos la premisa $n = d$ ("el ser sobre el que no puede pensarse nada mayor es Dios") podríamos inferir $Ex(x = d)$ ("Dios existe") inmediatamente mediante la regla **ice**, proceso que evidentemente es circular. Sin embargo, para aplicar **ice** a $n = d$ en la lógica libre, hay que contar previamente con la fórmula $Ex(x = n)$ ("existe el ser sobre el que no cabe pensarse nada mayor"). En la siguiente versión del argumento, esta fórmula no es una premisa sino una consecuencia (paso 4) de las premisas 2 y 3, las cuales se leen: *2*) "si no existe el ser sobre el que no cabe pensarse nada mayor, entonces el ser sobre el que no cabe pensarse nada mayor no es un ser sobre el que no cabe pensarse nada mayor" y *3*) "el ser sobre el cual no cabe pensarse nada mayor es un ser sobre el que no cabe pensarse nada mayor":

1	$n = d$	**h**
2	$\sim Ex(x = n) > \sim Nn$	**h**
3	Nn	**h**
	—	
4	$Ex(x = n)$	2, 3 **mt**
5	$Ex(x = d)$	1, 4 **ice** (lógica libre)

[159] *The Nature of Necessity.*

[160] W. E. Mann, "Definite Descriptions and the Ontological Argument" en *Philosophical Applications of Free Logic*, K. Lambert (ed.), pp. 257-272; sigue a J. Berg.

[161] La descripción sería $\iota x\theta x$, donde θ es el conjunto de las propiedades divinas: "la cosa única que es divina".

14.6.2.3 Job y Kant

Una versión del argumento moral de Kant podría formularse en la lógica modal. Se trata básicamente de dos situaciones morales discutidas en el libro de *Job*:

1. Un mundo utópico, en que se conjungan felicidad y virtud: Ux[Bx <> Vx] (donde el universo se limita a los hombres y Bx: x goza de la beatitud —por ende, no sufre—, y Vx: x es virtuoso, moralmente bueno, inocente). Tal es la teología de los "consoladores" de Job, quienes trataban de persuadir a éste de que sufría porque no era inocente: Bj <> ~Vj.

2. El mundo de Job, en que la gente inocente sufre como Job, quien perdió familia, haberes y salud. Job es, pues, un contraejemplo viviente de la teología de sus consoladores: ~Bj & Vj.

1		~Bj & Vj	**h**
2	c	Ux[Bx <> Vx]	**h**
3		Bj <> Vj	2 **ecu** j/x
4		~Bj & Vj	1 **i**
5		~Bj	4 **ec**
6		~Vj	3, 5 **sd** (para coimplicación)
7		Vj	4 **ec**
8		~Ux[Bx <> Vx]	2-7 **ing**

El mundo de Job pertenece a los mundos posibles en que no vale la teología de sus consoladores. Según el libro de Job, Dios dijo que Job tenía razón: el mundo real pertenece a abajo, no a arriba (T: Ux[Bx <> Vx]:

T
~T

<— mundo real

Esto, evidentemente, no es solución al problema del mal. Dios en efecto ofreció poco consuelo a Job,[162] fuera de preguntarle dónde estaba cuando Él, Dios, puso los cimientos del mundo. Pero Kant sí ofreció una solución, la cual ha sido llamada su argumento "moral". Dijo (o así podría expresarse) que los consoladores tienen razón —llamó T (Ux[Bx <> Vx]) el "bien supremo" (*summum bonum*)— sólo si se presupone o se "postula" la escatología, e. d., la existencia de Dios y la vida de ultratumba (la conjunción es representable como "omega": Ω). Puesto que $T \rightarrow \Omega$, pues, tenemos estas circunstancias modales: (el cosmograma M):

[162] En la parte poética del libro; en la prosaica hay una restauración al final.

T	Ω
$\sim T$	Ω
$\sim T$	$\sim\Omega$

14.6.3 Dios y modalidad

Una de las discusiones ontológico-epistémicas más ricas de la escolástica es aquella en torno a la naturaleza de la modalidad (9.2.1,3). El contexto era la teología filosófica. San Agustín habló de lo que Dios "pudo pero no quiso" realizar, sugiriendo así que hay opciones providenciales distintas de la realidad creada. Santo Tomás y otros filósofos medievales refirieron la realidad creada al poder "dispuesta" (*ordinata*) de Dios y las posibilidades a su poder absoluto, capaz de realizar lo que no es contradictorio. Para Enrique de Gante hay dos tipos del ser: esencial (*esse essentiae*) y existencial (*esse existentiae*), los cuales se remiten al entendimiento y a la voluntad divinos, respectivamente. Las posibilidades, también se decía, arraigan en la mente asociada con el "*Verbo*" (*Logos*) de Dios, la cual es idéntica con su esencia, y representan las infinitas maneras en que la esencia divina es "imitable fuera" de sí misma. A veces el término "ideación" (*ideatio*) se usaba para indicar la relación entre la mente divina y su contenido. Según estas doctrinas, pues, la modalidad es "real" en el sentido de que está fundamentada en el ser divino posibilitante.

Duns Escoto (9.2.1) también refirió los conjuntos de lo posible a la mente divina, pero les atribuyó cierta independencia de Dios en el sentido de que lo imposible "lo sería aun cuando Dios, asumiéndose lo imposible, no existiera", y lo posible

> podría estar vigente (*stare*) absolutamente por virtud propia, aun cuando no hubiera, asumiéndose lo imposibile, ninguna omnipotencia para la que fuera un objeto.

Se ha afirmado que para Escoto la posibilidad es "un área *a priori* de lo inteligible y cual tal no tiene ninguna clase de existencia".[163] Sin embargo, no es fácil explicitar lógicamente el sentido de afirmar que lo posible sería posible si no existiera Dios, quien existe necesariamente. Si la posibilidad se relaciona esencialmente con los distintos contenidos y éstos se remiten a la *ideatio* divina, parece que sigue habiendo una fundamentación de la modalidad.

El siguiente texto interesante es un resumen de la controversia en el Siglo de Oro:

> los tomistas y escotistas han interpretado las esencias, quididades o los posibles como entes eternos, reales y completamente independientes en su ser de Dios como causa creadora: sean algo positivo o negativo (como dicen los tomistas), sean algo intensional o inteligible... (que Escoto llama el "ente diminuto"), sean finalmente algún posible remoto y fundamental que ni siquiera depende del entendimiento divino (como enseña Poncio). Pero sea lo que fuere, para estos hombres es un ente real y no Dios.[164]

---

[163] Knuuttila, *Modalities...*, p. 138, con referencias.

[164] La "defensa de Platón" del cuzqueño Juan de Espinosa Medrano, "el Lunarejo", *Philosophia thomistica*, Roma, 1688, p. 61, párrafo 36; Juan Ponce, OFM, *Cursus philosophicus*, 1643; Redmond, "Latin American Colonial Philosophy: The Logic of Espinoza Medrano", *The Americas* (Academy of American Franciscan History), vol. 30, núm.4, p. 497; ver también W. Redmond, *La lógica en el Virreinato del Perú*, ICE, México, 1998.

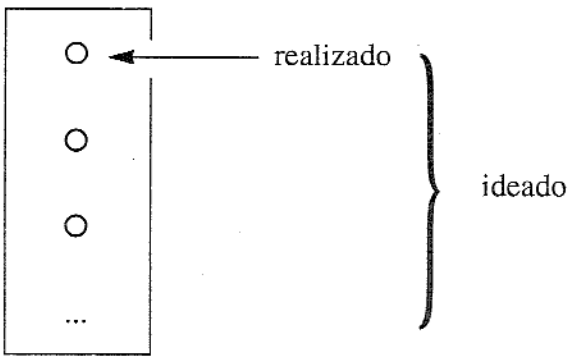
El teísta puede distinguir entre dos áreas y las relaciones que guardan con Dios. Usamos "ideación" aquí en un sentido neutral para acomodar las varias posiciones en torno a lo que "es" la modalidad para indicar la relación entre el contenido modal y el entendimiento divino. Las dos áreas que corresponden aproximadamente a las "ideas" y las "cosas" de Platón, al determinismo y la libertad (tal vez al *pour-soi* y *en-soi* de Sartre):

- los mundos posibles, lo abstracto, la ideación necesaria corresponde al entendimiento divino, pues los modos son necesarios (13.2).

$$\Box p \rightarrow \Box\Box p$$
$$\Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p$$
$$\nabla p \rightarrow \Box\nabla p$$

- el mundo real, incluye la existencia de los entes concretos, actualización por la voluntad divina (*creatio*) que determina libremente actualizar un mundo posible ("ponerlo fuera de sus causas") haciendo que lo contingente exista en el mundo real (4.1.5.3, 9.2.3), pues la conjunción p & $\Diamond{\sim}p$ no es necesaria.

Un esquema:



Los escolásticos, en efecto, tenían cuidado de no confundir los modos en su discurso sobre Dios. Ya que permitían la modalización de la proposición entera (*de dicto*) y de los elementos individuales de la proposición (*de re*), podían analizar "Dios crea" de varias maneras para evitar los problemas ontológicos como el determinismo (4.1.5.1, 9.2.2). Usemos su sistema sortal (2.2.7) con los operadores modales actuales para analizar la modalidad del *dictum* : "Dios crea", $d[c]$:[165]

- *de dicto*:

$$\Box \quad \{d[c]\}$$
$$\nabla\{d[c]\}$$

[165] Redmond, *La lógica extensional del Siglo de Oro*, unidad 69. El descenso de $d[c]$ sería la oración única dc_1, pues hay un solo creador.

• *de re*:

$d\Diamond[c]$

$\Box d[c]$

$\Box d\nabla[c]$

La primera oración *de dicto*: "es necesario que Dios cree", es F porque no es necesario que Dios cree; pero la segunda: "es contingente que Dios cree", es V. Las tres oraciones *de re* son V; note que las expresiones *d,* en la primera, y $[c]$; en la segunda no son afectadas por la modalidad, (claro que $d\Box[c]$ sería F). Las dos oraciones siguientes (V) podrían glosarse así:

$\nabla\{d[c]\}$	∇Cd
$\Box d\Diamond[c]$	$Ex\ [\Box(x = d)\ \&\ \Diamond Cx]$

APÉNDICE

Simbolismo

He aquí una lista completa de los símbolos empleados. Para cada signo hay muchas variantes (agregamos ejemplos de la notación polaca).

1. lógica *elemental*; incluye la:

- *proposicional*: $\sim p$: no p (polaco: Np); $p > q$: si p entonces q (polaco: Cpq); p & q: p y q (polaco: Kpq); p v q: p y/o q (polaco: Apq); $p <> q$: p si y sólo si q —abreviaremos "si y sólo si" como *ssi*— (polaco: Epq); $p \mid q$: "ni p ni q" en el sentido [p & q] (polaco: Dpq); p <\/> q: o p o q (pero no ambos).

- *predicativa* (de la cuantificación): Fa: la cosa a es F; UxFx: todo —llámese "x"— es F (polaco: ΠxFx) —cuantificador universal—; ExFx: algo —llámese "x"— es F (polaco: ΣxFx) —cuantificador existencial—; Fab: la cosa a guarda la relación F con la cosa b, U$x[Fx > Gx]$: todo F es G (para cualquier cosa, llámese "x": si x es F entonces es G): E$x[Fx$ & $Gx]$: algún F es G, etcétera.

- *de la identidad*: $a = b$ (la cosa a es idéntica a la cosa b).

- *abstractores*: $\{x\backslash Fx\}a$, equivalente a Fa (la cosa a es F; e. d., posee la propiedad $\{x\backslash Fx\}$, la de ser F, la propiedad $\{x\backslash Fx\}$ conviene a a).

2. lógica *modal* alética:

$\Diamond p$: es posible que p (p es posiblemente V); otros símbolos: ∇p, Mp (polaco), Pp (escolástico).

$\Box p$: es necesario que p (p. ej., es necesariamente V); otros: ∇p, Lp (polaco), Sp (escolástico).

∇p: es contingente que p (definición de $\Diamond p$ & $\Diamond\sim p$); otro símbolo (escolástico): Mp.

$p \rightarrow q$: necesariamente: si p entonces q (definción de $\Box[p > q]$).

3. otras extensiones modales de la lógica:

- *epistémica*: *Sfp*: Fulano sabe que *p*; *Pfp*: es posible que *p*, hasta dónde Fulano sepa; *Cfp*: Fulano cree que *p*; *Tfp*: es compatible con todo lo que Fulano cree que *p*.

- *deóntica*: *Op*: debe ser el caso que *p*, es obligatorio que *p*; *Lp*: es lícito o permitido que *p*: *Vp*: es vedado, prohibido que *p*.

- *telémica (de la voluntad)*: *Qfp*: Fulano quiere/desea que *p*.

- *temporal*: *Sp*: es siempre el caso que *p*; *Qp*: es a veces el caso que p; *Np*: no es nunca el caso que *p*; *Pp*: fue el caso que *p*; *Hp*: siempre fue el caso que *p*; *Fp*: será el caso que *p*; *Gp* siempre será el caso que *p*.

Reglas lógicas y abreviaturas

Agregamos las siglas de las reglas y otras abreviaturas usadas en este libro:

ai: *axioma de la identidad*
conpos: *contraposición*
dm (véase **oc** o **sh**)
eab: *eliminación del abstractor*
ec: *eliminación de la conjunción*
ece: *eliminación del cuantificador existencial*
eci: *eliminación de la coimplicación (equivalencia)*
ecu: *eliminación del cuantificador universal*
edn: *eliminación de la doble negación*
ee: *eliminación del operador epistémico "hasta donde se sepa"*
ef: *eliminación del operador temporal del futuro*
eg: *eliminación del operador temporal de "siempre en el futuro"*
eh: *eliminación del operador temporal de "siempre en el pasado"*
ei: *eliminación de la identidad*
el: *eliminación del operador deóntico de la licitud*
en: *eliminación del operador modal de la necesidad*
eng: *eliminación de la negación (de la contradicción)*
ep: *eliminación del operador modal de la posibilidad*
epa: *eliminación del operador temporal del pasado*
es: *eliminación del operador epistémico del saber*
et: *eliminación del operador doxástico "compatible con todo lo que se cree"*
F: falso
fg: *equivalencias para el futuro y "siempre futuro"*
h: *hipótesis (premisa)*
i: *iteración en un secuente subordinado (subprueba)*

iab: *introducción del abstractor*
ib: *introducción del operador doxástico del creer*
ic: *introducción de la conjunción*
ice: *introducción del cuantificador existencial*
ici: *introducción de la coimplicación (equivalencia)*
icu: *introducción del cuantificador universal*
id: *introducción de la disyunción*
idn: *introduccion de la doble negación*
ie: *introducción del operador epistémico "hasta donde se sepa"*
ig: *introducción del operador temporal de "siempre futuro"*
igp: *introducción de los operadores temporales Gp*
ih: *introducción del operador temporal de "siempre futuro"*
ihf: *introducción de los operadores temporales Hf*
ii: *introducción de la implicación*
in: *introducción del operador modal de la necesididad*
ing: *introducción de la negación*
io: *introduccion del operador deóntico de la obligación*
ip: *introducción del operador modal de la posibilidad*
is: *introducción del operador epistémico del saber*
iv: *introducción de la verdad en un mundo posible*
lo: *equivalencias para licitud y obligación*
mp: *modus ponens*
mpe: *modus ponens estricto*
mt: *modus tollens*
oc: *equivalencias de Ockham* (de De Morgan)
ph: *equivalencias para el pasado y "siempre pasado"*
pn: *equivalencias para la posibilidad y necesidad*
ps: *equivalencias para el ser posible "hasta donde se sepa" y el saber*
r: repetición
$\mathbf{r}_{df}$: repetición de una proposición en su forma abreviada (definición) o al revés
sd: silogismo disyuntivo
sh: equivalencias de Sherwood (de De Morgan)
ssi: si y sólo si
tc: equivalencias para el ser "compatible con todo lo que se cree" y el creer
ti: transitividad de la implicación
V: verdadero
vm: equivalencias de la negación y la verdad en un mundo posible
1: verdadero
0: falso

Siendo rector de la Universidad Veracruzana
el doctor Víctor A. Arredondo,
Lógica simbólica para todos, de Walter Redmond,
se terminó de imprimir en agosto de 1999,
en Imprenta Universitaria, Río Nautla 16, Col. Cuauhtémoc,
Xalapa, Ver., Tel. 18-39-92; empresa del *Fondo para el*
Fomento de las Actividades de la Universidad Veracruzana, A. C.,
SEP-FOMES 933109
La edición consta de 1000 ejemplares, más sobrantes para reposición.
Formacion: Óscar I. Galicia Gonzáles y estuvo al cuidado
de Luis Miguel Gallardo y Víctor Hugo Ocaña.